

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica II
(Astrofísica y Física de la Atmósfera)



**MODELIZACIÓN DE LA TURBULENCIA SOBRE LA
BASE DE VORTICIDAD TURBULENTA**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Daniel Cano Villaverde

Bajo la dirección del doctor
José L. Cano Marchante

Madrid, 2008

• **ISBN: 978-84-692-1063-5**

©Daniel Cano Villaverde, 2008

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica II
(Astrofísica y Física de la Atmósfera)



MODELIZACION DE LA TURBULENCIA SOBRE LA BASE DE LA VORTICIDAD TURBULENTA

DANIEL CANO VILLAVERDE

Madrid, Junio de 2008

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA TIERRA, ASTRONOMÍA Y

ASTROFÍSICA II

(ASTROFÍSICA Y FÍSICA DE LA ATMÓSFERA)

MODELIZACION DE LA TURBULENCIA SOBRE LA BASE DE LA VORTICIDAD TURBULENTA

Memoria que, para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas, presenta el
licenciado D. DANIEL CANO VILLAYERDE

Director: Dr. D. José L. Cano Marchante

Madrid, Junio de 2008

*Dicen que Werner Heisenberg
musitó, poco antes de morir, que
estaba listo para preguntarle a Dios
el por qué de la Relatividad y el por
qué de la Turbulencia, y que
abrigaba la certeza de obtener una
respuesta al primer interrogante...*

Dedicado a mi esposa, Rosel, a mis hijos, Alejandro y Cristina
y a mi padre y madre, José Leandro y Ángeles.

ÍNDICE

ÍNDICE	i
AGRADECIMIENTOS	
CHAPTER I. INTRODUCTION	1
I.1	1
I.2	6
CAPÍTULO II. ESTADO DEL ARTE	8
II.1 INTRODUCCIÓN	8
II.2 EL PROBLEMA DE LA TURBULENCIA	10
II.3 EVOLUCIÓN DE LAS TEORÍAS TURBULENTAS CLÁSICAS	17
II.3.1 Teoría de la Longitud de Mezcla	18
II.3.2 Teoría de los Coeficientes de Intercambio (Teoría de Smith)	20
II.3.3 Teoría K	21
II.3.4 Teoría Estadística de Taylor	22
II.3.5 Teoría del Vórtice de Taylor	25
II.3.6 Teoría de la Semejanza de Kolmogorov	27
II.3.7 Últimos Comentarios	29
II.4 TÉCNICAS MODERNAS	31
II.4.1 Parametrizaciones	32
II.4.2 L.E.S.	35
II.4.3 D.N.S.	38
CAPÍTULO III. TÉCNICAS DE COMPUTACIÓN	41
III.1 INTRODUCCIÓN	41
III.2 RESOLUCIONES NUMÉRICAS	43
III.3 CONDICIONES DE CONTORNO	46
III.4 ESQUEMAS NUMÉRICOS	49
III.4.1 Establecimiento de Malla	50
III.4.2 Adaptación de la Malla	53
III.4.3 Distribución de Magnitudes Físicas	56
III.4.4 Metodología de Cálculo	59
III.4.4.1 Método de Diferencias Finitas	60
III.4.4.2 Método de Elementos Finitos	62
III.4.4.3 Métodos Espectrales	64

III.4.4.4	Métodos Eulerianos	67
III.4.4.5	Métodos Semilagrangianos	70
CAPÍTULO IV. MODELO TEÓRICO DE TURBULENCIA		73
IV.1	INTRODUCCIÓN	73
IV.2	VORTICIDAD	75
IV.3	ECUACIONES DE MOVIMIENTO	81
IV.3.1	Algunas Aplicaciones de Modelización	86
IV.4	ECUACIÓN DE LA ENERGÍA	93
IV.5	ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	97
IV.6	ECUACIÓN DE DIFUSIÓN	100
IV.7	DESARROLLOS TEÓRICOS DE VÓRTICES. PRIMERA APROXIMACIÓN	103
IV.8	BALANCES ENERGÉTICOS. APROXIMACIONES	114
ANEXO I. ALGEBRA TENSORIAL		119
ANEXO II. CÁLCULOS AUXILIARES		120
CAPÍTULO V. COMPUTACIÓN DEL MODELO		127
V.1	INTRODUCCIÓN	127
V.2	ECUACIONES	130
V.3	CONDICIONES INICIALES	138
V.4	REJILLA Y SISTEMAS DE DISCRETIZACIÓN	139
V.5	CONDICIONES DE CONTORNO	142
V.6	PROCESO DE INTEGRACIÓN	146
ANEXO III. CÁLCULOS AUXILIARES		150

CAPÍTULO VI. ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL MODELO. 1 VÓRTICE	153
VI.1 INTRODUCCIÓN	153
VI.2 EVOLUCIÓN DE UN VÓRTICE AISLADO	156
VI.2.1 Condiciones Iniciales	157
VI.2.2 Variables Puntuales. Primera y Segunda Fases	159
VI.2.3 Perturbaciones Turbulentas. Primera y Segunda Fases	172
VI.2.4 Componentes Puntuales del Rotacional. Primera y Segunda Fases	183
VI.2.5 Perturbaciones Turbulentas del Rotacional. Primera y Segunda Fases	195
VI.2.6 Proyecciones 2D de los Vectores Velocidad y Rotacional de la Velocidad. Primera y Segunda Fases.	203
VI.2.7 Análisis Comparativo Primera y Segunda Fases Vs. Tercera Fase	208
VI.2.8 Variables Puntuales. Tercera Fase	211
VI.2.9 Perturbaciones Turbulentas. Tercera Fase	227
VI.2.10 Componentes Puntuales del Rotacional. Tercera Fase	232
VI.2.11 Perturbaciones Turbulentas del Rotacional. Tercera Fase	239
VI.2.12 Evolución de Perfiles Verticales. Proceso Completo	246
VI.2.13 Comparación con Procesos Atmosféricos Reales	254
 CAPÍTULO VII. ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL MODELO. 3 VÓRTICE	 259
VII.1 INTRODUCCIÓN	259
VII.2 EVOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE VÓRTICES	261
VII.2.1 Condiciones Iniciales	262
VII.2.2 Variables Puntuales. Primera y Segunda Fases	264
VII.2.3 Perturbaciones Turbulentas. Primera y Segunda Fases	268
VII.2.4 Componentes Puntuales del Rotacional. Primera y Segunda Fases	273
VII.2.5 Perturbaciones Turbulentas del Rotacional. Primera y Segunda Fases	279
VII.2.6 Algunas Proyecciones 2D del Vector Rotacional de la Velocidad. Primera y Segunda Fases.	282
VII.2.7 Variables Puntuales. Tercera Fase	284
VII.2.8 Perturbaciones Turbulentas. Tercera Fase	292
VII.2.9 Componentes Puntuales del Rotacional. Tercera Fase	295
VII.2.10 Perturbaciones Turbulentas del Rotacional. Tercera Fase	298
VII.2.11 Estudio de la Elongación de los tres Vórtices. Proceso Completo	302
VII.2.12 Proyecciones 2D de los Vectores Velocidad y Rotacional de la Velocidad. Tercera Fase	305

CHAPTER VIII. CONCLUSIONS, ABSTRACTS & FUTURE	312
VIII.1 GENERAL CONCLUSIONS & ABSTRACTS	312
REFERENCIAS	319

Agradecimientos

Al profesor Dr. D. José Leandro Cano Marchante, por su constante empuje y tesón en la Dirección de este estudio, sin cuya filosofía no hubiera sido posible llevarlo a buen puerto. Por haberme enseñado a identificar, a través del análisis científico, los procesos físicos y el uso de razonamientos apropiados sobre la realidad, desde mi más tierna infancia.

Al profesor Dr. D. Emiliano Hernández Martín, por su constante apoyo para alcanzar la finalización de este proyecto.

Al profesor Dr. D. Carlos Yagüe Anguís, por sus acertados comentarios que han llevado a aclarar, con frecuencia, problemas de difícil resolución a los que me he enfrentado en esta memoria.

Al profesor Dr. D. Gregorio Maqueda Burgos, por sus enseñanzas sobre la Mecánica de los Fluidos durante mi licenciatura, así como sus acertados comentarios sobre los problemas encontrados en los aspectos informáticos de este estudio.

A D. Enrique Eusebio Martínez, por su constante apoyo logístico, así como al personal del Centro Meteorológico de Canarias Oriental, que me inculcaron el amor por el trabajo meteorológico, desarrollado a lo largo de sus respectivas vidas profesionales.

Al Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica II de la Universidad Complutense, por las facilidades encontradas para la realización de este trabajo en sus dependencias.

Asimismo, deseo agradecer el aliento y trabajo de todas aquellas personas que, no habiendo sido mencionadas concretamente, han colaborado de una manera u otra para la conclusión de esta Tesis Doctoral.

Por último, aunque no por ello menos importante, deseo agradecer a mi madre, Angelines, su dedicación por el trabajo y esfuerzo en la sombra, de la que he aprendido la constancia y el esfuerzo desinteresado que merece la familia, incluso en los detalles más pequeños.

CHAPTER I

INTRODUCTION

I. INTRODUCTION

I.1.- The current study of the vast majority of the dynamic problems and of the effects that these have in the motions of the fluids demands the knowledge of the appropriate differential equations (PACKARD, 1980; TAKENS, 1981) and their application to actual subjects (SREENIVASAN, 1999). In those, the idealization and even the introduction of viscous phenomena approach us to reality, what is insufficient, because so much the micromotions, associates for example to the blood circulation or to respiration, as the big displacements in the universe are governed by the turbulent phenomenon (FRISCH et al., 1998).

First of all, let us consider the main subject of this memorandum, which is to propose a new interpretation of the turbulence using the concept of vorticity, once we apply the turbulent perturbations besides a numerical proposal of resolution that will be showed in detail afterwards.

As it is known, the simple functional resolution of viscous problems is very limited (BATCHELOR, 1953; TOWNSEND, 1956); the problem gets worse to impossibility when we try to solve the equations of motion for turbulent flows. Because of this fact there exists a great variety of theories, models and adjustments or quantitative approximations for the knowledge of the corresponding motions and the possible resolution of the technical problems of immediate application. We should not forget the fact that theories and adjustments separate us from the physical reality that we are studying, because in the studies of high precision, it is not unusual for us to find, by means of the use of these techniques, deviations of reality frequently unsolvable.

In fact, the current proposal of the equations for its experimental handling carries the necessary parameterization of those terms associated to the turbulent perturbations and their covariances (turbulent fluxes). The use of the aforementioned parameterization is proposed from the different theories of turbulent development trying to substitute the variances and covariances by means of approximations, related to the average flow.

In the particular case of the resolution of problems in geophysical fluids (Atmosphere and Ocean) (DOYLE and DURRAN, 2001), the difficulty grows because of the presence of perturbing elements in the planetary surface, such as

rugosity, land use, temperature of colour, etc., as well as the fact that thermic effects govern the behaviour of the aforementioned fluids (CROSS, 1993). In the resolution of these problems the initial and boundary conditions have to be included. We don't have, in principle, any control on them, in distinction from the case of application software in laboratory problems.

The distinction between use and resolution of the problems of motions in actual fluids or in experiments of laboratory leads normally to a relative differentiation of the treatment of the problems that can be studied and that present an interesting character, so much for basic research as well as for technical applications (WYGNANSKI et al., 1986). We find in the bibliography some laboratory applications along with direct studies on actual fluids or some applications of the findings of the laboratory works for technical use so.

The description of turbulent motions, especially the atmospheric ones, can be presented from two extreme scales of observation, namely: the integral scale of the turbulence what evidences the macroscopic visualization of the phenomenon and the microscale of Kolmogorov, what informs us about the necessary interrelation between perturbations and mathematical modelling of the corresponding equations.

Precisely, through the hypothesis of Kolmogorov of universal equilibrium (KOLMOGOROV, 1941, 1962) the relation between the average flow (supporting the energy for turbulence) and the turbulent perturbations (transferring the energy to the molecules for its loss by friction) can be justified through different mathematical formulations by means of convenient parameterizations.

However, some determined problems of larger precision and even of academic and scientific application demand more convenient solutions. Therefore the turbulent theories have led on their efforts to microphysic analysis and descriptions of the related microphysics. The hypotheses of universal equilibrium of Kolmogorov, as well as the use of the dynamic similarity for the application to the Theory of Monin Obukhov, are clearing the way to more accurate applications. These applications even also contemplate the possibility of technical applicability (MONIN and OBUKHOV, 1954; MONIN and YAGLOM, 1971; PANOFSKY and DUTTON, 1984; HILL, 1989).

The quantitative evaluations by means of techniques of modelling and numerical approximation have based their development on the use of the computation for the resolution of turbulent problems. They have got diagnosis and

prognosis processes with enough acceptable results inconceivable without the use of these techniques. Different proposals for the discretization of the correspondent differential equations, as well as the inclusion of parameters, have been used to control the stability of the numerical results of the corresponding finite integrations. Therefore we can find in the bibliography a great quantity of papers of numerical applications and their use, not only physically, basing their results on discretizations of centred differences, advanced, Galerkin's methods, etc.

The research of a larger knowledge of the turbulent motions has led to the scientific community, in latest times, to different proposals, e.g.: helicity (WU and LILLY, 1992), intermittency, higher-order closures and turbulent vorticity (CHORIN, 1994; STOLOVITZKY and SREENIVASAN, 1994; MENEVEAU and SREENIVASAN, 1995; HALSEY et al., 1995).

Nevertheless, we are still far away from understanding correctly the generation of turbulence as from the viscous behaviour of a fluid and its evolution or development. We are really out of more information than the quantification of Reynolds's number like parameter discriminating between laminar (viscous) and turbulent regimens.

In addition to the mentioned before parameterisations some theories have been proposed because of their relation with the accomplished work in this thesis. We highlight the statistical theory of Taylor proposed about 1930-40's decade like tool for the understanding of the microturbulence and the application to macroscopic effects. Simultaneously Taylor made a first proposal of the similarity of the vorticity concept and the turbulence, since both phenomena should be related and should have a three-dimensional reality.

In the year 1986 Ms. Reyes Garijo Villaverde presented at Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica II a Msc degree focused on the concept of vorticity proposed by Taylor, named "*Modelización de los Intercambios Turbulentos de la Capa Límite Planetaria mediante la Vorticidad (Modelization of the Turbulent Changes of the Atmospheric Boundary Layer trough Vorticity)*". This project widened and improved Taylor's ideas, by means of the inclusion of the three-dimensional character of vorticity as well as the turbulence phenomena.

This thesis bases its development on the concept of turbulent vorticity, with three-dimensional character, including the use of discretizations for the differential equations obtained, in order to reach some theoretical and experimental results. Some

of them will be used to study the evolution and development of turbulent vortexes with appropriate hypothesis (we will show them) with bigger detail through this dissertation of the thesis.

The fundamental and innovative contribution that appears in this work consists in the elaboration of a complete system of new equations (motion, diffusion, continuity and energy). If we act numerically on them we will obtain a solution for the problem of the turbulence including basically the fundamental rotation effects.

The numerical solution of the equations has been performed without the use of parameterizations for the elements of the covariances of the perturbations of wind and energy (e.g., $\overline{u'w'} = l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \frac{A_z}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} = \dots$), because the limitations that were imposed by those adjustments of the aforementioned covariances, in terms of the average flows, have disappeared.

On the other hand, accepting the strong randomness of turbulence, a stochastic behaviour for the perturbations of the three components of wind and associated scalars with the energy of the system have been introduced.

The before mentioned support from the computation to the scientific investigation has previously managed to, for this work, the complete construction of a numerical discrete model of finite integration to which the conditions of stability have been demanded (Courant-Friedrichs-Lewy between other ones). The corresponding software has been designed and after different versions, the more appropriate showing the evolution and generation of vortexes (turbulent eddies) has been selected from the principle of the imposition of a minimal variation at the field of velocities in just one mesh point, what is the basis of the different shears, i.e., the rotational vector's components.

The general proposal of the problem has been starting from the Navier Stokes's viscous equations. Reynolds's decomposition has been applied to them ($u = \bar{u} + u'$). In the handled bibliographic references we have not found any definite methodology for the obtaining of the averaged and perturbed elements yet, obviously neither to the new used perturbed elements (except the ones based on the aforementioned parameterizations). In this work new methods have been proposed to the determination of the average of velocity of the corresponding flows to the integral scale, just like for the calculation of the perturbations of the velocity field.

Although in the chapter IV it will be developed more carefully, we anticipate that the used methodology begins evaluating u from Navier Stokes's equations, \bar{u} by means of the equations of turbulent flows (Reynolds equation), meanwhile we will use the definition of Reynolds for the calculation of u' , i.e.: $u' = u - \bar{u}$.

Once the physical and mathematical subjects were presented and after the discrete integration we can obtain the corresponding results that are highlighted and summarized in the chapters VI and VII.

The study of the obtained results will evidence the expansion of the effect of vorticity inside a time dependent real flow. Also simultaneously it is possible to observe the dispersion of the physical effect of the rotation what generates the presence of rotational perturbations of the velocity fields. These perturbations, for different scales of motion, enhance the idea that the turbulent eddies contain a whole series of perturbations of minor size (*cascade effect*) proposed by Kolmogorov's theory.

The academic and scientific contribution can be schematized in the developing of an absolutely innovative methodology for evaluation of velocity fields. Based on turbulent vorticity Taylor's idea, it is a tool for the knowledge of turbulence together with the proposal of decomposition of Reynolds. This has allowed us some discrete integrations of the equations adapted to the turbulent flow with effects of turbulent vorticity by means of an also innovative development. For this integration, classical techniques of construction of meshes have been used.

I.2.- The phases of the presented memorandum can be summarized in the following performances that would admit even a chronological proposal.

In the chapter II the current situation of this part of science is described, so much the turbulent problem as modelling and the numerical applications to different studies framed within the Fluid Mechanics. It should be possible to observe some different applications to the Atmospheric Boundary Layer and even to the Shallow Oceanic Waters Layer.

In the chapter III some of the computation techniques used in the proposed equations in this report will be showed. In like manner some of the more usual techniques on discretization and meshes (or grids) will be introduced.

In the chapter IV, firstly from the equations obtained in the Msc, above mentioned, with the effects of the turbulent vorticity, the equations of motion have become elaborate. Unlike that study, we have not used any parameterization to any turbulent perturbation.

Hereafter the energetic and continuity equations have been obtained. They have been developed with the inclusion of the same effect of rotation in the field of velocities and with the physical contents of the diffusion.

The chapter V is dedicated to the preparation of the equations obtained in the previous chapter for their use in a finite volume characterized by means of a discrete mesh, as well as the transformation in finite elements for the numerical calculation of the variations of the magnitudes treated in this work. Moreover the used programming techniques are detailed.

The chapters VI and VII are dedicated to the exposition of the numerical results obtained from the integration of the proposed equations, applied for different initial conditions of turbulent vorticity within the volume of control.

In the chapter VI the so much spatial as temporal evolutions of the velocity fields will be showed. These evolutions inform us about the development of the effects of the vorticity, their expansion and their growth; always through of temporal scales conveniently marked off in terms of the own obtained results.

In the chapter VII certain results will be showed, similar than to the ones of the previous chapter, with the difference of the initial three vortex installation.

Finally in the chapter VIII we proceed to construct a summary and findings extracted of this same text of the development of memory. We will finalize this last chapter with proposals for future investigations and application to concrete cases.

CAPITULO II

ESTADO DEL ARTE

II.1 INTRODUCCIÓN

En torno a las cuatro primeras décadas del pasado siglo surge la necesidad de construir una teoría que se ajuste al comportamiento real del movimiento de los fluidos, de la misma manera que la física había sido capaz de comprender y reproducir con exactitud los movimientos de los sólidos, desde los más pequeños objetos de estudio hasta los grandes movimientos estelares (CANUTO, 1996, 1998; YANO et. al, 2005).

Previamente se habían desarrollado modelos teóricos para aplicación a fluidos ideales como los correspondientes al teorema de Bernouilli, al de los impulsos, y al concepto de continuidad, cuya base se encontraba en las lejanas disquisiciones de los pensadores griegos (por ejemplo Arquímedes).

Así como en los movimientos de los sólidos se habían obtenido ecuaciones finitas o diferenciales que describían la posición de los objetos a lo largo del tiempo, junto con sus magnitudes dinámicas, se buscaron expresiones analíticas para los mismos conceptos, pero aplicados a los fluidos, cuyo comportamiento molecular difiere notablemente del de un sólido. Es en el concepto de la potencial movilidad de las moléculas fluidas, frente al relativo comportamiento estático de las de un sólido, donde yace la gran diferencia entre estos dos tipos de materias que conduce a la aparición, en los primeros, de los movimientos con una fuerte componente caótica (movimientos brownianos), frente a la consideración determinista que describe suficientemente bien los de los segundos.

A lo largo del transcurso del siglo XX y tras propuestas muy diferentes, desde analítica forzosamente determinista hasta el uso de los parámetros estadísticos, se han desarrollado nuevas teorías que intentan explicar la dinámica más real de los movimientos fluidos. Partiendo de las consideraciones de pérdida energética por fricción molecular, Navier y Stokes plasmaron las correspondientes expresiones analíticas para movimientos laminares. Con el uso del concepto de la descomposición de Reynolds para todas las magnitudes implicadas en dichos movimientos reales se han obtenido las ecuaciones de movimiento aplicables a los diferentes regímenes turbulentos para los fluidos.

Pese a los enormes avances de tipo analítico, estadístico y computacional, aún no hemos sido capaces de explicarnos detalladamente qué fenómenos, actuando

sobre los fluidos, consiguen transformar, ni en qué modo, un movimiento de soporte molecular (laminar) en un movimiento de carácter turbulento completamente desarrollado, cuyo soporte es el de las agrupaciones moleculares fluidas.

Uno de los avances más destacados en los estudios referentes a la turbulencia fue llevado a cabo por la escuela rusa y enunciado a través de la teoría del equilibrio universal de Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1941).

El propósito, al haber desarrollado esta memoria, ha sido el de aportar algunos conocimientos sobre fenómenos íntimamente relacionados con la turbulencia y su generación, entre los que hemos destacado, por ejemplo, la vorticidad turbulenta, tanto en su forma funcional o analítica como en su influencia numérica reflejada en la integración discreta de las ecuaciones correspondientes. Así pues, mostraremos las ecuaciones funcionales de movimiento, continuidad, energía y difusión con la formulación analítica del concepto mencionado. Posteriormente desarrollaremos una integración numérica para mostrar la generación y evolución de vórtices turbulentos (GARIJO, 1986).

II.2 EL PROBLEMA DE LA TURBULENCIA

En la naturaleza de los fluidos existen movimientos de carácter bien estructurado (laminares) que se desarrollan a bajas velocidades en entornos apropiados como para que las fuerzas de la viscosidad sean las que gobiernen la dinámica, así como otros de carácter irregular (turbulentos) que aparecen cuando las tensiones que dominan la dinámica proceden de la interacción entre grupos moleculares (paquetes fluidos)¹ (KUNDU, 1990).

Al igual que en cualquier otro problema físico, relacionado con la cinemática y la dinámica de los cuerpos, los movimientos de los fluidos responden simplemente a la ley de Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.1)$$

donde \vec{F} es la suma vectorial resultante de las fuerzas que concurren, m es la masa y \vec{a} es la aceleración que resulta. Esta expresión analítica es a menudo denominada 1ª Ley de Newton.

El tipo de fuerzas que actúan sobre los fluidos, generando toda una gama de procesos dinámicos, es enormemente variado, aunque todas ellas se basan en las propiedades de las moléculas, así como en sus comportamientos físicos. Podríamos mencionar diversas fuerzas: Gravitatorias, de Tensión Superficial, Viscosas y toda una relación de ellas que puede llegar a cubrir cualquier campo de fuerzas imaginable y que cada una de ellas, por separado, daría lugar a un tipo de movimiento y en conjunto a otro, muy probablemente diferente, al que describiríamos al aplicar uno a uno los campos de fuerzas expuestos en el problema.

El tema que nos ocupa puede reflejarse considerando como sistema de fuerzas aplicadas las Gravitatorias y como sistema de fuerzas internas las procedentes de la variación de la Energía Cinética y de la presión. El resultado de las ecuaciones a que conduce este balance de fuerzas da lugar, en un primer tratamiento, al conocido Teorema de Bernouilli, cuya expresión analítica corresponde a:

¹ Estas estructuras, cuando se aplican a la Atmósfera, son frecuentemente denominadas “burbujas atmosféricas”.

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \phi \right) = - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} \quad (2.2)$$

donde P es la presión del fluido, ρ es la densidad, ϕ representa la energía potencial que procede de campos de fuerzas derivadas de un potencial y \vec{v} (o v) representa el vector velocidad de una partícula de componentes (u, v, w) . Esta ecuación vectorial recibe el nombre de Ecuación de Bernouilli (en la dinámica de fluidos corresponde a la expresión dinámica en el sistema de Euler).

En su expresión más sencilla y de mayor uso técnico queda en la forma:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \phi = cte \quad (2.3)$$

correspondiente a fluidos en régimen estacionario e irrotacional.

Estas ecuaciones proceden de una idealización del sistema de fuerzas aplicadas al fluido, ya que la propia expresión analítica muestra la constancia de las energías procedentes de los efectos del campo de la Presión, de la Velocidad y del campo Gravitatorio. Sin embargo, no son reflejo real del movimiento de los fluidos, aunque nos permiten la obtención de gran cantidad de propiedades, al menos cualificadas, aunque su cuantificación se aleje de la realidad.

De forma similar y ya que acabamos de expresar el Teorema de la Energía, se puede describir analíticamente el Teorema de Conservación del Momento y el de la Masa, llegándose a las expresiones analíticas (HUNSAKER, 1947):

$$\sum \vec{F} = \rho (v_s^2 S_s - v_e^2 S_e) \quad (2.4)$$

para el momento, donde \vec{F} representa las fuerzas aplicadas al sistema, v_s es la velocidad del fluido al pasar por la sección S_s de salida, mientras que v_e es la velocidad del fluido al pasar por la sección S_e de entrada en un hipotético tubo de corriente. Esta expresión también es conocida como Teorema de la conservación del Momento o Teorema de los impulsos.

A lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, James Clerk Maxwell enunció las ecuaciones que, aplicándolas a la mecánica de fluidos, conducen a:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

Esta expresión analítica expresa el Teorema de la conservación de la Masa y recibe el nombre de Ecuación de Continuidad.

Como ya se ha indicado, disponer de estas tres formas analíticas de los Teoremas de Conservación físicos es una ayuda inestimable para cualificar comportamientos, no así para la cuantificación de los mismos. Si deseamos acercarnos a la realidad hay que añadir a los campos de fuerzas considerados aquellos otros que contemplen al menos los efectos de consumo energético friccional, conceptos asociados a la molécula constitutiva de cada fluido.

Existen dos posibles comportamientos asociados a las moléculas que son: la interacción molécula a molécula –fricción molecular propiamente dicha–, o lo que es lo mismo, los llamados efectos de viscosidad que, cuando son tenidos en cuenta, generan los movimientos laminares y la interacción entre paquetes moleculares que dan lugar a los movimientos turbulentos.

La base fundamental de las interacciones entre paquetes moleculares reside en la propia interacción molécula a molécula, es decir, la viscosidad; de manera tal que si no existiese (consideraciones de Bernouilli) no cabría la posibilidad de generación de regímenes turbulentos.

Pese a la base molecular de los propios movimientos turbulentos cabe añadir que aún no disponemos de una explicación plausible que justifique apropiadamente el paso de regímenes laminares a regímenes turbulentos.

Los científicos han estudiado, a lo largo de los tres últimos siglos, los movimientos bien estructurados (laminares), que se desarrollan a bajas velocidades en entornos suficientemente controlados como para que las fuerzas de viscosidad sean las que gobiernen la dinámica. En la primera mitad del siglo XIX se estableció el sistema de ecuaciones de los movimientos laminares, mediante la expresión:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} - \nabla \varphi \quad (2.6)$$

donde \vec{v} es la derivada sustancial de la velocidad, μ es la viscosidad dinámica (en la Atmósfera toma un valor en torno a $1.17 \cdot 10^{-4}$ poises) y ϕ representa el potencial correspondiente a algunas de las fuerzas aplicadas. En esta expresión se han supuesto dos condiciones de simplificación, a saber: la constancia de la viscosidad dinámica y la no existencia de manantiales ni sumideros de masa ($\text{div} \vec{v} = 0$). Esta expresión analítica es también conocida como Ecuaciones de Navier-Stokes.

Otro problema bien diferente, aunque bastante más real, es el estudio de los regímenes dominados por movimientos irregulares (turbulentos), generados a partir de que el balance entre las fuerzas viscosas, anteriormente descritas, y las tensiones que proceden de la interacción entre los paquetes moleculares, comienza a inclinarse del lado de estos últimos, aunque exista un intervalo de régimen transicional en el que los dos sistemas de fuerzas tienen una importancia comparable.

A finales del siglo XIX Osborne Reynolds introdujo su idea de la descomposición de los campos turbulentos de magnitudes físicas en valores medios, propios de los desplazamientos de los paquetes de moléculas, junto con una perturbación respecto de la media, que caracteriza el movimiento en el interior de esos paquetes fluidos (REYNOLDS, 1894). La ecuación de movimiento que corresponde a regímenes turbulentos es

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\frac{\nabla \bar{P}}{\rho} - 2\Omega \times \bar{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho} \text{div}(-\rho \overline{v'v'}) \quad (2.7)$$

donde \bar{v} es la velocidad promedia característica de los paquetes fluidos (descomposición de Reynolds), \bar{P} es la presión media, $\Omega \times \bar{v}$ es la desviación de Coriolis asociada a la rotación del sistema de referencia, $\frac{\mu}{\rho} = \eta$ es la viscosidad cinemática (en la Atmósfera toma un valor en torno a $0.1 \text{ cm}^2/\text{seg}$) y el término $-\rho \overline{v'v'}$ representa el tensor de esfuerzos de Reynolds, obtenido como promedio de los productos de las perturbaciones de la descomposición de Reynolds aplicada al campo de velocidades, o lo que es lo mismo, el tensor de las covarianzas de dicho campo. Estas ecuaciones también son conocidas como Ecuaciones de Reynolds (LESLIE, 1973).

Es notable la diferencia conceptual que existe entre los movimientos laminares (viscosidad) y los turbulentos ya que, mientras las magnitudes asociadas a los regímenes laminares, y en especial el parámetro de viscosidad son función de la naturaleza del fluido y de la temperatura, como es sabido las asociadas a los regímenes turbulentos dependen únicamente de la dinámica del movimiento (MONIN y YAGLOM, 1975).

El único parámetro que puede informarnos y tan sólo someramente del desequilibrio entre las tensiones viscosas y las turbulentas es el número de Reynolds propuesto en su artículo titulado "*An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water in Parallel Channels Shall Be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels*" (REYNOLDS, 1883), cuyos valores numéricos, aproximadamente, indican el paso de los regímenes laminares a los regímenes turbulentos. Siendo, por ejemplo, para fluidos con movimientos canalizados entre límites finitos un valor crítico 2000; por debajo del cual se desarrolla el régimen laminar y por encima, si las condiciones son apropiadas, se puede pasar a régimen turbulento. En el caso de fluidos en estado de libertad, como por ejemplo la Atmósfera, este valor crítico pasa a tener una dualidad, siendo 55 el límite superior para el régimen laminar y 750 el inferior para el desarrollo del régimen turbulento (CANTWELL, 1978; TRITTON, 1988).

La expresión matemática de este número adimensional es:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\eta} \quad (2.8)$$

donde Re es el número de Reynolds, ρ y μ densidad y viscosidad dinámica, respectivamente, v y D son escalas de módulo de velocidad y tamaño característicos del flujo (LANDAU y LIFSHITZ, 1987).

Como se observa en la expresión (2.7), la descomposición valor medio más perturbación se ha aplicado a la velocidad y a la presión, no así a la densidad. Este hecho se fundamenta en que la aplicación de estas ecuaciones a la Atmósfera se sitúa preferentemente en las capas más bajas y cercanas al suelo (Capa Límite Atmosférica) (ORSZAG, 1977), en donde la densidad del aire es mucho menos variable que otras magnitudes dinámicas. Sin embargo, es posible la obtención de la ecuación correspondiente admitiendo variaciones de densidad de procedencia

turbulenta; obviamente la expresión analítica de la ecuación diferiría de la planteada antes. La ecuación propuesta es bastante adecuada ya que sería la que se obtendría con las condiciones de Boussinesq (DUTTON, 1976) aplicadas a los fluidos en general en régimen turbulento.

Una clara excepción, merecedora de ser mencionada en este momento, correspondería al caso de movimientos verticales en los que, además de las fuerzas propuestas en la última ecuación, han de ser consideradas o tenidas en cuenta las procedentes de la aplicación del Principio de Arquímedes (empuje) y que normalmente proceden de las variaciones de densidad aunque se describen usualmente con las de la temperatura (fuerzas ascensionales o flotabilidad); es decir:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g \frac{\Delta T}{T} - \eta \Delta \bar{w} + \frac{1}{\rho} \text{div}(-\rho \overline{v'w'}) \quad (2.9)$$

siendo \bar{w} la componente vertical de la velocidad promediada, \bar{v} la velocidad media, ΔT la diferencia de temperaturas entre el exterior (T) y el interior de una parcela en movimiento turbulento (eddy turbulento), $\Delta \bar{w}$ el operador laplaciano aplicado a la tercera componente de la velocidad promediada y el término $\overline{v'w'}$ representa los tres elementos del tensor de esfuerzos turbulentos que corresponden a la componente w' .

Esta expresión admite la aplicación de las condiciones de Boussinesq, en cuyo caso las variables presión, densidad y temperatura (P , ρ y T) se sustituirían por P_1 , ρ_0 y T_0 , siendo P_1 la diferencia entre la presión real del fluido y una presión referencial en equilibrio estático (P_0) y ρ_0 y T_0 la densidad y la temperatura del fluido en dichas condiciones de equilibrio.

El uso de todas estas ecuaciones aplicadas a los regímenes turbulentos pasa lógicamente por el conocimiento del campo de velocidades medias y perturbadas, que presenta un sistema con cuatro incógnitas (\bar{u} , u' , v' y w' una vez que se sitúa el sistema coordenado con $\bar{v} = \bar{w} = 0$) y tres ecuaciones, matemáticamente irresoluble salvo que impongamos condiciones adicionales para completar el sistema.

Las diferentes ecuaciones que completarían el sistema pueden proceder de las diferentes teorías turbulentas desarrolladas hasta el momento; desde las teorías de cierre de primer orden (Prandtl, Smith, teorías K) hasta los más modernos intentos con cierres de orden superior, incluyendo la Helicidad $-H = \nu \cdot \nabla \times \nu$ (HIDE, 2002) y las aplicaciones de la Semejanza Dinámica (teoría de Monin-Obukhov y propuestas empíricas para los campos de velocidad y temperatura), así como el tratamiento estadístico propuesto por Taylor.

Esta memoria, desarrollada sobre la idea de la vorticidad turbulenta (TAYLOR, 1931), trata de generar una nueva propuesta para la integración de las ecuaciones diferenciales, convenientemente actualizadas, para regímenes turbulentos.

II.3 EVOLUCIÓN DE LAS TEORÍAS TURBULENTAS CLÁSICAS

Una vez planteadas las ecuaciones correspondientes al régimen turbulento describiremos la evolución que los diferentes métodos de cierre (teorías turbulentas) han sufrido a lo largo del tiempo de forma aproximadamente cronológica. Teniendo en cuenta que prácticamente todas tratan de propuestas dependientes del flujo medio para evaluar la perturbación del campo de velocidades. Esta misma técnica se utiliza con otros campos físicos de aplicación a los intercambios turbulentos de otras magnitudes, como pudieran ser por ejemplo: el calor (Temperatura Potencial), la humedad, la entropía, la masa, etc.

II.3.1 TEORÍA DE LA LONGITUD DE MEZCLA

Se basa en la similitud entre el concepto de “*recorrido libre medio*” para los gases y la distancia que recorre un eddy turbulento desde que emerge de un nivel dado hasta que llega a otro nivel en el que pierde su identidad y sus propiedades físicas son identificadas con las de ese nivel. La similitud no es formal, ya que mientras el recorrido libre medio es función de la Temperatura, y a lo sumo de la naturaleza del gas, la longitud recorrida por el eddy turbulento, o “*longitud de mezcla*”, es función exclusiva del flujo.

Esta similitud permite, sin embargo, un desarrollo paralelo de la analítica de la dinámica turbulenta y la dinámica viscosa. De igual manera que la ley de Newton ($F = \mu \nabla v$) evalúa la tensión viscosa como dependiente del gradiente de la velocidad, las tensiones turbulentas se pueden establecer como proporcionales al gradiente del campo de velocidad promediada; o lo que es lo mismo, que la perturbación de la velocidad sea proporcional al gradiente de velocidad media:

$$u' = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (2.10)$$

donde la constante de proporcionalidad es, precisamente, la longitud de mezcla (l).

Esta expresión admite otros formatos ya que l , al ser un desplazamiento, contiene información vectorial (l_x, l_y, l_z), sin embargo, para el tema que nos ocupa es suficiente con la idea expuesta.

Normalmente, y una vez desarrollada la turbulencia, se alcanza la isotropía, por lo que no existiendo direcciones privilegiadas, las tres perturbaciones de las componentes de la velocidad (u', v', w') tienen la misma evaluación respecto del flujo medio. Así pues, $u' = v' = -w'$ (HALTINER, 1957), con lo que la tensión turbulenta quedaría de la siguiente forma:

$$F = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \quad (2.11)$$

A partir de esta expresión se pueden proponer nuevos formatos de la ecuación de movimiento sin la influencia de las perturbaciones del campo de velocidades; por ejemplo, para la primera componente de la velocidad promediada despreciando los efectos de las tensiones turbulentas $F_{xx} = -\rho \overline{u'u'}$ y $F_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$, la ecuación quedaría:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{u} = -\frac{\nabla \bar{P}}{\rho} + f\bar{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (2.12)$$

siendo f el denominado parámetro de Coriolis.

II.3.2 TEORÍA DE LOS COEFICIENTES DE INTERCAMBIO (TEORÍA DE SMITH)

Continuando con el paralelismo con los efectos de viscosidad Smith propuso que, de forma similar a como Newton evaluó la tensión viscosa a través de la proporcionalidad con el gradiente de la velocidad ($F = \mu \nabla v$), las tensiones turbulentas pueden evaluarse a través de la proporcionalidad con el gradiente del campo de velocidad promediada y así:

$$F_{xz} = A_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} (= -\rho \overline{u'w'}) \quad (2.13)$$

siendo A_{xz} el llamado coeficiente de intercambio para el transporte vertical de la componente x del momento lineal. Al igual que en la exposición del modelo anterior (Prandtl), la similitud entre μ y A_{xz} no es formal ni conceptual, ya que mientras μ depende, como sabemos, de la temperatura y la naturaleza del fluido, y además es isotrópico, los coeficientes A_{ij} dependen del flujo y tienen naturaleza tensorial.

Con esta hipótesis para la primera componente de la velocidad promediada, despreciando los efectos de las tensiones turbulentas $F_{xx} = -\rho \overline{u'u'}$ y $F_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$, la ecuación quedaría:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{u} = -\frac{\nabla \bar{P}}{\rho} + f \bar{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (2.14)$$

II.3.3 TEORÍA K

Este tipo de propuesta es, probablemente, la de mayor aplicación técnica, ya que su uso está muy extendido en el estudio de la difusión de contaminantes desde el sistema Euleriano. Consiste en una extensión de la hipótesis de Smith, en la que se aplica la similitud sobre el coeficiente de viscosidad cinemática, η , en lugar de sobre el coeficiente de viscosidad dinámica, μ .

El formalismo analítico se plasma al establecer que la tensión turbulenta continúa siendo ahora proporcional al gradiente de la velocidad promediada, según la expresión

$$F_{xz} = \rho K_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} (= -\rho \overline{u'w'}) \quad (2.15)$$

donde el coeficiente K_z recibe el nombre de coeficiente de viscosidad cinemática turbulenta o coeficiente de difusividad turbulenta. Al igual que en los parámetros anteriormente definidos (l y A_{xz}) K_z difiere formal y conceptualmente de su similar viscoso η , en los mismos términos ya comentados.

Con esta propuesta, la ecuación de movimiento, que corresponde a la primera componente de la velocidad promediada, despreciando los efectos de las tensiones turbulentas $F_{xx} = -\rho \overline{u'u'}$ y $F_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$, quedaría:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{u} = -\frac{\nabla \bar{P}}{\rho} + f \bar{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (2.16)$$

Esta ecuación aplicada a un escalar pasivo, como por ejemplo la Temperatura Potencial, la masa de contaminantes, etc., constituiría una forma elemental de la ecuación de difusión, que desde el sistema de Euler admite soluciones funcionales tras hipótesis que eliminen los términos no lineales y los efectos estacionarios, en la que sería factible la inclusión de manantiales y sumideros de la magnitud física considerada.

Usualmente, las soluciones funcionales suelen ser exponenciales respecto a los parámetros turbulentos del flujo.

II.3.4 TEORÍA ESTADÍSTICA DE TAYLOR

Un intento de resolución del problema, en una línea física totalmente alejada de las proporcionalidades utilizadas en las tres teorías anteriores, fue propuesto por Taylor (1935) basado en el supuesto de que las perturbaciones turbulentas de la descomposición de Reynolds (u' , v' y w') tienen un comportamiento preferentemente aleatorio (RUELLE, 1971), con lo que el uso de los estadísticos mostraría adecuadamente las características de esas magnitudes.

La base conceptual se encuentra en el sistema de Lagrange, que analiza las trayectorias descritas por las partículas fluidas, a diferencia del sistema de Euler, que estudia el campo de posiciones de las partículas del fluido (ROBERT y SOMMEERIA, 1991).

Por esta razón y dado que no es posible el conocimiento exacto de la trayectoria de una partícula, las expresiones funcionales informan acerca de la probabilidad de encontrar las partículas en una posición dada en diferentes momentos. El conjunto de posiciones alcanzadas por una partícula fluida que se emite desde un mismo punto inicial y bajo las mismas condiciones físicas, es el ente asemejable a un eddy turbulento aunque haya que recurrir previamente a la propiedad estadística de la ergodicidad, ya que las posiciones determinadas en la siguiente figura corresponden a estados finales de una misma partícula, por lo que la posición promedia se evaluaría mediante el promedio de conjunto, mientras que normalmente los promedios turbulentos de la descomposición de Reynolds son temporales (MONIN, 1971, 1975). Con la propiedad mencionada, ambos promedios serían iguales, y por lo tanto, los estados finales de la figura responden realmente a posiciones de diferentes partículas que han sido emitidas desde el mismo punto P a lo largo del tiempo.

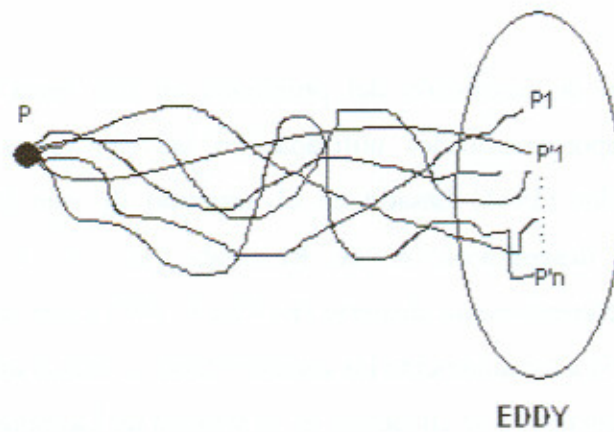


Fig. 2.1- Esquema de una posible evolución aleatoria de partículas emitidas desde un mismo punto P, constituyendo un eddy después de un transcurso temporal arbitrario.

El estadístico fundamental que caracteriza la aleatoriedad de las trayectorias y de sus posiciones finales es el coeficiente de autocorrelación:

$$R(\xi) = \frac{\overline{u'(t-\xi) \cdot u'(t)}}{u'^2} \quad (2.17)$$

siendo u' la perturbación del campo de velocidades en dos instantes cercanos $t-\xi$ y t .

Este coeficiente tiene un comportamiento gaussiano (SREENIVASAN y DHARVA, 1998):

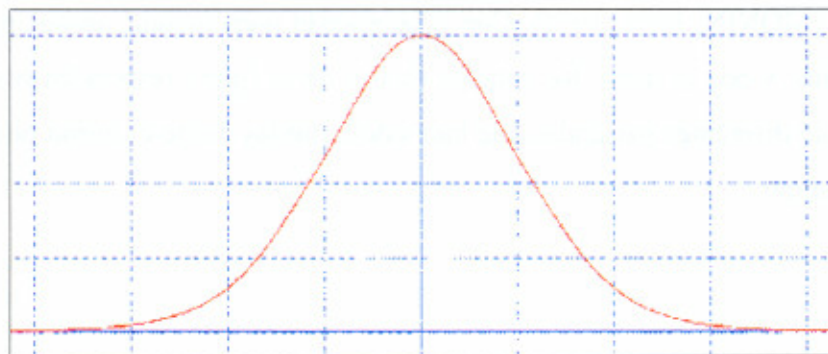


Fig. 2.2- Imagen gaussiana del comportamiento del coeficiente de autocorrelación característico de una evolución aleatoria.

y sus valores numéricos oscilan entre 1 para $\xi=0$ y 0 para $\xi=\infty$; lo que quiere decir que para intervalos temporales pequeños los campos de velocidad “recuerdan” sus valores anteriores, mientras que para intervalos grandes el campo de velocidad

“olvida” toda la distribución anterior, y tiene un comportamiento puramente aleatorio.

La posición final de las trayectorias caracterizaría un eddy turbulento en el que el centro correspondería a la posición promedia (\bar{x}) y el resto de los puntos (x_i) estarían ocupados por otro tipo de partículas de dicho eddy. Una magnitud apropiada para la medida de la extensión del eddy, es decir de la dispersión que el propio movimiento turbulento generaría sobre sus partículas, vendría dada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.18)$$

siendo N el número total de partículas del eddy.

Operando convenientemente se obtiene la expresión:

$$\frac{d\sigma_x^2}{dt} = 2\overline{u^2} \int_0^t R(\xi) d\xi \quad (2.19)$$

que, en forma integral, conduciría a que:

$$\sigma_x^2 = 2\overline{u^2} \int_0^T \int_0^t R(\xi) d\xi dt \quad (2.20)$$

Estas expresiones para la desviación entrarían a formar parte, por ejemplo, de las ecuaciones difusivas turbulentas para cualquier tipo de magnitud, una vez que se hubieran obtenido las formas finitas para las integrales de esas ecuaciones mencionadas en párrafos anteriores, y que suelen tener formas exponenciales.

Para un estudio más detallado remitirse a Eyink (1994) y también Frisch (1995).

II.3.5 TEORÍA DEL VÓRTICE DE TAYLOR

La teoría de Taylor, de 1931, establece la hipótesis de que las inestabilidades del régimen turbulento se traducen en la generación de vórtices (rotacionales de la velocidad que originan el movimiento de las parcelas fluidas que pueden ser visibles a simple vista).

El desarrollo de Taylor se realiza paralelamente a la hipótesis de la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl. La diferencia conceptual se encuentra en el hecho de que mientras que la teoría de este último se elabora sobre la base de intercambios de la cantidad de movimiento entre los niveles de salida y llegada de las perturbaciones turbulentas, Taylor establece una idea similar, pero para el intercambio de las componentes de la vorticidad turbulenta. Analíticamente:

$$\overline{u'w'} = \overline{w'l} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \quad (2.21)$$

es ahora aplicado a la componente vertical del rotacional de la velocidad, lo que conduce a la expresión:

$$2\overline{\eta'w'} = \overline{w'l} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} \quad (2.22)$$

siendo l la longitud de mezcla, u' y w' las componentes perturbadas de la velocidad; como de costumbre, las barras denotan los promedios y η' la segunda componente perturbada de la vorticidad.

La extensión tridimensional de la teoría de la vorticidad de Taylor se enfrenta a dos problemas contenidos en las propias hipótesis de trabajo, que son insoslayables. “La constancia de la vorticidad de un elemento fluido tiene lugar si se aplica a un problema bidimensional” y además el paso de las expresiones eulerianas al sistema de lagrange muestra que “una parcela de fluido que en el tiempo t ocupe la posición x, y, z tiene en algún instante previo t_0 las mismas componentes de la vorticidad que un entorno suyo”.

Con estas limitaciones las ecuaciones de movimiento pueden expresarse de la siguiente forma:

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \bar{v} \cdot \nabla \bar{u} + \frac{\partial E'}{\partial x} + 2 \left(\overline{w' \eta' - v' \zeta'} \right) \quad (2.23)$$

siendo F_x la componente x del sistema de fuerzas aplicadas, que podría también representar la componente x de las fuerzas procedentes del efecto de la viscosidad, E' la energía cinética perturbada y ζ' la tercera componente perturbada de la vorticidad.

Esta es la idea básica sobre la que se ha desarrollado esta memoria, aunque evitando las limitaciones impuestas por Taylor, a la vez que conservando el carácter tridimensional de sus hipótesis.

II.3.6 TEORÍA DE LA SEMEJANZA DE KOLMOGOROV

La teoría de semejanza de Kolmogorov, también conocida como K41 (KOLMOGOROV, 1941), establece, a través de una serie de escalas de movimiento, cuales de ellas captan la energía necesaria para la generación de la turbulencia y cuales se encargan de que dicha energía sea cedida a la molécula para posteriormente, en forma de calor procedente del rozamiento, ser disipada.

Las grandes escalas que caracterizan efectos físicos exteriores al flujo son las encargadas de la captura de la energía mencionada y tienen tamaños comparables a las irregularidades a las que se enfrenta el flujo en las cercanías de un obstáculo y en especial en torno a la superficie terrestre (KLEISSER y ZANG, 1991), si de turbulencia atmosférica se trata. El tipo de movimientos generados por estas irregularidades es en general anisotrópico, siguiendo las direcciones preferentes de desarrollo del flujo (RUELLE y TAKENS, 1971).

Las escalas de movimiento que se encargan de ceder la energía capturada por las mayores a las moléculas para que éstas, a su vez, la pierdan en forma de calor friccional, son las menores escalas permitidas de movimiento turbulento. Tienen tamaños comparables al de las propias moléculas y reciben el nombre de “microescalas de la Turbulencia” o “microescalas de Kolmogorov”. Dado que a partir de ellas y decreciendo hacia el tamaño típico de la molécula, se produce la pérdida, o disipación, de la energía capturada, existe una relación funcional de la escala de tamaños obtenida a partir de la aplicación de la semejanza dinámica dada por:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (2.24)$$

siendo ν la velocidad de la escala de los movimientos más pequeños y ϵ la tasa de disipación de energía (KOLMOGOROV, 1941a).

Estas escalas de movimiento según la propuesta de Kolmogorov son isotrópicas.

Así pues, y de forma resumida, la turbulencia, según la teoría de semejanza (K41), toma la energía con las grandes escalas de movimiento y de irregularidades

exteriores al flujo, la cede en el entorno de las pequeñas escalas a las moléculas y desde las mayores escalas hasta las menores existe una gama variada de escalas intermedias que caracterizan perturbaciones turbulentas (eddies) encargadas de recibir la energía y transmitirla a las perturbaciones de tamaño inmediatamente inferior. Estas transferencias de energía se llevan a cabo de forma homogénea y el intervalo de escalas que participan en este proceso recibe el nombre de “*subrango inercial*”.

II.3.7 ÚLTIMOS COMENTARIOS

En el último cuarto del siglo XX han continuado proponiéndose y desarrollándose algunas ideas más o menos acertadas y que carecen de interés añadido para nuestra línea de trabajo (Helicidad, Cierres de Orden Superior, etc.), mientras que los intentos más acertados se han dirigido a la resolución de las ecuaciones o sus modelizaciones vistas en los apartados anteriores mediante ajustes, normalmente empíricos, funcionales (parametrizaciones) o a través de la discretización de las ecuaciones diferenciales y posterior tratamiento numérico.

La razón conocida de la necesidad de propuestas empíricas o tratamientos numéricos se basa en que las ecuaciones originales de los movimientos turbulentos, e incluso las modelizadas mediante la formulación matemática de las hipótesis explicadas no son funcionalmente resolubles, ya que los términos $v \nabla v$ no son lineales.

Esta circunstancia, junto con otras razones, como por ejemplo el número de ecuaciones menor que el número de incógnitas, ha decantado las tendencias hacia el soporte de los tratamientos numéricos (SMITH, 1988; ECKMANN, 1992).

Los primeros intentos se elaboraron sobre hipótesis unidimensionales, lejos de la realidad de los flujos turbulentos, pero de gran utilidad para la comprensión de los fenómenos, de su planteamiento y para la interpretación de los resultados. Posteriormente se plantearon resoluciones bidimensionales que nos acercaban algo a la realidad, aunque persistía la gran diferencia entre los comportamientos reales y los obtenidos mediante el tratamiento numérico de las ecuaciones. Por último se inician en torno a 1970 las propuestas tridimensionales que continúan actualmente su desarrollo.

En cualquiera de las tres metodologías los científicos se han enfrentado a diferentes errores asociados a los propios procesos de discretización de las ecuaciones y de la parametrización necesaria para caracterizar los procesos en escalas de movimiento inferiores al tamaño de las mallas de discretización.

Los planteamientos matemáticos tienen sus propias propuestas de minimización de los errores de los diferentes métodos; pese a ello, frecuentemente encontramos diferencias sustanciales entre las soluciones numéricas de un problema y los datos reales procedentes de experimentos de campo en situaciones totalmente comparables a las que permite el planteamiento numérico.

La memoria presentada trata, precisamente, de la propuesta y resolución numérica de ecuaciones diferenciales de movimiento, de energía y de continuidad en las que se ha incluido específicamente la vorticidad turbulenta y el efecto que sobre ella tiene la dinámica turbulenta.

II.4 TÉCNICAS MODERNAS

A partir, aproximadamente, de 1970 se han utilizado tanto experimentos de laboratorio como de campo y procesos de computación para la resolución de las ecuaciones diferenciales a las que se ha llegado tras las diferentes modelizaciones con base en las distintas teorías turbulentas. Este proceder continúa actualmente incluyendo diferentes tipos de parametrizaciones basados en las teorías mencionadas, así como en diversos procedimientos de integración numérica que podríamos englobar en dos grandes líneas denominadas: LES (en inglés Large Eddy Simulation) y DNS (en inglés Direct Numerical Simulation). El uso de estos procedimientos no es estanco, en el sentido de que la integración numérica puede auxiliarse del uso de la parametrización y ésta mejorarse con el uso de la discretización para la integración numérica.

Aún así, intentaremos mencionar tanto los procesos de parametrización como los LES y los DNS lo más concretamente posible.

II.4.1 PARAMETRIZACIONES

Una vez que las ecuaciones diferenciales, con expresión explícita de las perturbaciones del campo de velocidad, o lo que es lo mismo, de las tensiones turbulentas, o covarianzas del mismo, se han modelizado con la inclusión funcional de las diferentes hipótesis de la turbulencia, que han conducido fundamentalmente a igualar el número de ecuaciones con el número de incógnitas para una posible resolución, quedaría por resolver el uso de los parámetros haciéndolos depender, mediante propuestas que concuerden con la experimentación de campo o de laboratorio, de variables que gobiernen el problema y que los conviertan en fácilmente mesurables (MIRONOV et al., 2000).

Siguiendo esta línea de trabajo, distintos autores se encaminaron hacia diferentes líneas de investigación. Consideramos suficientes las siguientes descripciones como algunos ejemplos de las parametrizaciones de las hipótesis turbulentas.

Por ejemplo: Prandtl propuso la teoría de la longitud de mezcla (PRANDTL, 1925) y Von Karman su dependencia con la estratificación y la distancia a las irregularidades del objeto que generaba la turbulencia (VON KÁRMAN, 1930) y que en el caso de la Atmósfera sería el mismo suelo.

$$l = l(\text{estratificación}, z) \quad (2.25)$$

La estratificación podría expresarse mediante $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ o alguno de los números adimensionales, como por ejemplo, el número de Richardson, el parámetro de Monin-Obukhov, etc.

Una propuesta sencilla, a la vez que de gran utilidad, podría ser:

$$l = Az^a \quad (2.26)$$

quedando el efecto de la estratificación en los coeficientes A y a . Una particularización de especial interés es la conocida propuesta de Von Karman para estratificación indiferente:

$$l = kz \quad (2.27)$$

siendo k la constante de Von Karman, cuyo valor es 0.4 (MAQUEDA, 1987).

Mediante la inclusión de esta propuesta en la forma diferencial del perfil de velocidades para la Capa Superficial Atmosférica se obtendría, tras la integración correspondiente, el conocidísimo perfil logarítmico de velocidades.

Un segundo ejemplo podría ser la propuesta de parametrización sobre la base de la teoría de semejanza de Kolmogorov, según la cual las difusividades turbulentas, tanto de momento como de calor (K_m y K_h), se expresarían mediante funciones analíticas del parámetro de Monin-Obukhov:

$$\xi = \frac{z}{L} \quad (2.28)$$

donde L sería la longitud de escala de Monin-Obukhov (en este parámetro se encuentra reflejada la estratificación) (OBUKHOV, 1971; DESNYANSKY, 1974b).

Algunas propuestas funcionales procedentes de experimentos de campo muestran que las difusividades turbulentas (K_m , K_h) dependen del anterior parámetro a través de las funciones universales de Bussinger (Φ):

$$K_m = \Phi_m(\xi) \quad (2.29)$$

$$K_h = \Phi_h(\xi) \quad (2.30)$$

Estas funciones deben ser calculadas para cada lugar según su propia estructura orográfica y de estratificación. Un caso concreto, basado en el experimento de Kansas, conduciría a:

$$\Phi_m(\xi) = (1 - 15\xi)^{-\frac{1}{4}} \text{ si } \xi < 0 \quad (2.31)$$

$$\Phi_m(\xi) = 1 + 5\xi \text{ si } \xi \geq 0 \quad (2.32)$$

$$\Phi_h(\xi) = 0.74(1 - 9\xi)^{-\frac{1}{2}} \text{ si } \xi < 0 \quad (2.33)$$

$$\Phi_h(\xi) = 0.74 + 5\xi \text{ si } \xi \geq 0 \quad (2.34)$$

aplicables a terreno homogéneo.

Estos y otros tipos de parametrizaciones se pueden utilizar también para aquellos comportamientos no bien definidos en escalas de tamaños inferiores a las escalas de la malla de integración numérica. Tal es el caso, por ejemplo, del estudio de Deardorff de 1971 sobre tratamiento tridimensional de las ecuaciones de movimiento, de energía y de continuidad (NICOLINI y TORRES, 2002; CARRIÓ y NICOLINI, 1999, 2000).

II.4.2 LES

La base fundamental de los modelos LES radica, entre otras investigaciones, en los trabajos de Deardorff (DEARDORFF, 1970, 1971, 1973; DECKER, 1994) en los que las ecuaciones diferenciales, tras la adopción de las expresiones para el movimiento, la continuidad y la energía tridimensionales en formato apropiado, se resuelven numéricamente mediante la discretización de la información numérica en una malla apropiada y la parametrización de los fenómenos turbulentos para aquellas escalas menores que las definidas por el paso de rejilla de la discretización usada (SGS) (ZANG et al., 1993; LIU et al, 1994; ULIASZ, 1994; MORINISHI y VASILYEV, 2001). Según Moin las aproximaciones LES “*computan directamente las grandes escalas que contienen energía, mientras que modelan la influencia de las pequeñas escalas*” (SPEZIALE, 1991; LESSIEUR, 1996; MOIN y KIM, 1997; MOIN y MAHESH, 1998).

Las ecuaciones utilizadas para la resolución numérica del movimiento de los fluidos son (DEARDORFF, 1972):

a) Ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_i u_j} - K_m \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right] + \left(\frac{2h\Omega_{i-1}}{u_*} \right) \overline{u_{i+1}} - \left(\frac{2h\Omega_{i+1}}{u_*} \right) \overline{u_{i-1}} - \\ & - \delta_{i3} \frac{gh}{u_*^2} \left(\frac{\overline{\rho}}{\langle \overline{\rho} \rangle} - 1 \right) - \frac{\partial \langle \overline{P} \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{P}^n}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde las sobreparras indican promedios de Reynolds en el volumen de integración, u_i es cada una de las componentes de la velocidad para $i=1, 2$ y 3 , K_m es el coeficiente de viscosidad turbulenta para intercambios de momento, Ω es la velocidad de rotación de la Tierra, u_* es la velocidad de fricción (función directa de la tensión turbulenta), P la presión adimensional, ρ la densidad, h la altura total de integración y los corchetes angulares ($\langle \rangle$) el promedio de conjunto espacial para todo el volumen.

b) Ecuación de la energía (KOLMOGOROV, 1942):

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_j \bar{\Theta} - K_h \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} \right) + \frac{\left(R - \frac{\partial \theta_{vs}}{\partial t} \right) z_i}{\langle -w \theta_v \rangle_s} \quad (2.36)$$

siendo Θ una temperatura adimensional dependiente de la temperatura potencial virtual (θ_v), K_h coeficiente de viscosidad turbulenta para intercambios de calor, w la componente vertical de la velocidad del fluido, R es una tasa de cambio de temperatura asociada con el flujo radiativo y z_i altura del estrato i -ésimo.

c) Ecuación de continuidad, supuesto fluido incompresible (LESSIEUR, 1990):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.37)$$

Las parametrizaciones mencionadas anteriormente, que afectan a las escalas pequeñas de la turbulencia, introducen sistemáticamente errores que desvían la solución numérica, obtenida mediante la integración de las ecuaciones, respecto de la real. Desde el inicio de estas técnicas se están intentando minimizar los errores que, como es lógico, tienden a crecer con el tiempo, pese a la inclusión de cotas matemáticas sobre la resolución numérica aplicada (VAN DYKE, 1982).

Una técnica, muy utilizada para el tratamiento del error cometido en las modelizaciones SGS, se basa en el uso de los parámetros estadísticos para caracterizar la naturaleza estocástica de las perturbaciones de las escalas pequeñas SGS de la turbulencia (SALVETTI y BANERJEE, 1995; WANG y BERGSTROM, 2004), dando lugar a los conocidos modelos LES estocásticos (MASON, 1994).

La integración numérica proporciona información sobre grandes perturbaciones atmosféricas que son las que aportan la energía para la generación y mantenimiento de la turbulencia, obteniéndose así perfiles y evoluciones de los desarrollos verticales del campo de velocidad y del campo de temperaturas asociadas a los flujos turbulentos de momento y de calor modelizados mediante el uso de la teoría K , a través de los conceptos de difusividad turbulenta o coeficientes de

viscosidad cinemática turbulentos. Constituyendo aplicaciones inmediatas de los modelos de cierre de primer orden, ya que los de orden superior normalmente se han descartado por su alto coste computacional.

“En los LES, sólo los grandes eddys que contienen energía, responsables de la mayor parte de los transportes de momento, calor y masa en el flujo, son explícitamente resueltos” (DING, 2001).

Algunas técnicas de resolución de los LES eliminan las perturbaciones de pequeña escala (alta frecuencia) mediante el uso de técnicas de filtrado pasa-bajo tras la aplicación previa del análisis espectral de la turbulencia para obtener la distribución de las diferentes perturbaciones contenidas en los flujos turbulentos (LABBE, MAGLARAS y GARNIER, 2007; PAOLI, LAPORTE y CUENTO, 2003, HOLZÄPFEL et. al, 2003).

II.4.3 DNS

Las soluciones del conjunto de ecuaciones de movimiento, energía y continuidad que gobiernan el movimiento turbulento de los fluidos, desde el punto de vista de los LES, adolecen de la falta de capacidad para representar todas las escalas involucradas en el movimiento, y en especial las menores, cercanas a la longitud de escala de Kolmogorov (PALADIN y VULPIANI, 1987b), definida, entre otras posibilidades funcionales, por:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.38)$$

siendo ν la viscosidad cinemática molecular y ε el valor de la energía de disipación. Como ya hemos indicado, esta situación se resuelve parametrizando convenientemente (MOIN y MAHESH, 1998) aquellas escalas menores que el tamaño de la rejilla de integración (SGS), lo cual supone una aproximación que en muchos de los casos podría ser plausible, pero que en otros tantos aleja los resultados de la realidad física (TENNEKEES y LUMLEY, 1972).

Otra posibilidad aplicable en el campo de la ingeniería de obstáculos sería la expresión:

$$\eta = \frac{L}{\sqrt[4]{AR_I^3}} \quad (2.39)$$

para aplicaciones técnicas según el CIMEC (Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería, Argentina), donde A es una constante de valor cercano a 1, R_I es el número de Reynolds para la escala integral del flujo y L es una escala de longitud de un supuesto cuerpo (obstáculo) sobre el que circula el fluido (MELLOR y YAMADA, 1974).

Tal como describíamos en el epígrafe anterior, el campo de actuaciones de los LES está centrado en lo que se denomina escalas cercanas al tamaño que define la escala integral de la turbulencia. A diferencia de estos últimos, los DNS trabajan en un campo de escalas menores, caracterizadas asimismo por otra escala de tamaños

pequeños, entre la escala de Kolmogorov y la escala definida por la longitud de escala de Taylor que se encuentra físicamente en torno a aquellos tamaños de perturbaciones turbulentas en los que la producción de energía procedente de las escalas integrales se equipara a la tasa de disipación de energía ($\varepsilon \approx \frac{u'^3}{L}$) por las escalas menores interaccionando con las moléculas.

Para satisfacer este requerimiento desde la escala de Kolmogorov, pasando por la de Taylor, hasta las escalas integrales, productoras de la energía, el sistema de estudio debe cumplir que el número de punto de la malla, N , verifique:

$$\begin{aligned} Nh &> L \\ &y \\ h &\leq \eta \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde h es el intervalo espacial de la malla en la dirección a estudiar, L el tamaño característico de la escala integral y η la de Kolmogorov. Además, el número de puntos de la rejilla estaría relacionado con la característica turbulenta del flujo (a través del número de Reynolds) por la expresión (LANDAU y LIFSHITZ, 1986, McCOMB, 1990):

$$N \approx Re^{\frac{9}{4}} \tag{2.41}$$

Usando la teoría k , la escala de Taylor cabría situarla en las gráficas espectrales de la turbulencia de $f^{-5/3}$, en torno a la longitud de escala dada por la expresión (MANSOURI, 2000):

$$\lambda = L \sqrt{15 \frac{\nu}{u' L}} \tag{2.42}$$

siendo L , de nuevo, la longitud de escala integral y u' la intensidad turbulenta.

Para aplicaciones técnicas se puede utilizar la expresión:

$$\lambda = \sqrt{\frac{15}{AR_t}} L \quad (2.43)$$

según el CIMEC; siendo la leyenda de las variables y parámetros la misma que la de la ecuación (2.39).

Las ecuaciones diferenciales utilizadas para las resoluciones numéricas se pueden esquematizar con:

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon - B + D \quad (2.44)$$

donde P es la tasa de producción de energía cinética turbulenta, ε es la tasa de disipación de la energía por viscosidad molecular, B el término de flotabilidad y D el término de transporte, expresados mediante las siguientes propuestas:

$$\begin{aligned} P &= -\overline{u'w'S} \\ B &= -\frac{g}{\rho_0} \overline{\rho'w'} \\ D &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k^2}{\sigma\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

que expresaría el efecto advectivo de transporte (procedente de los términos $v \cdot \nabla k$). Siendo u' , w' y ρ' perturbaciones de los campos de velocidad y densidad, ρ_0 la densidad de un estado de referencia, S la cizalla vertical del flujo medio y σ la desviación estándar de la disipación de energía friccional.

Creemos innecesario continuar con la relación de posibles parametrizaciones, o modelizaciones, de la forma $\overline{u'w'}$ en la resolución de modelos tipo DNS. La actividad investigadora es de tal magnitud que daría lugar a un listado enorme de posibilidades que se escapan de la intención de esta memoria.

CAPITULO III

TÉCNICAS DE COMPUTACIÓN

III.1 INTRODUCCIÓN

Como ya hemos puesto de manifiesto en diferentes párrafos anteriores, las ecuaciones de movimiento, de energía, de continuidad... que describen el movimiento turbulento de los fluidos —obtenidas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes con la inclusión de la descomposición de Reynolds, para cualquier magnitud, en valor medio y valor perturbado— carecen de resolución funcional incluso cuando se incorporan modelizaciones o parametrizaciones que simplifican la dificultad de las expresiones utilizadas. Las razones matemáticas que impiden la existencia de soluciones funcionales radican básicamente en dos aspectos; a saber: la no linealidad de los términos advectivos (BATCHELOR, 1967), presentes en cualquier ecuación de movimiento ($\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$) o de transporte y difusión de cualquier magnitud pasiva, m , ($\mathbf{v} \cdot \nabla m$) y la imposibilidad de resolución de las ecuaciones dado que presentan mayor número de incógnitas que de ecuaciones.

El primero de los inconvenientes se puede soslayar, excepcionalmente, mediante la inclusión de hipótesis científicas que anulen los efectos físicos basados en los términos advectivos (YIH, 1977). Este es el procedimiento a seguir para obtener algunas soluciones funcionales de las ecuaciones de Navier-Stokes (arrastre de objetos inmersos en flujos, efectos de sustentación, etc.) (IRMAY y ZUZOVSKY, 1970; WANG, 1990; SHAPIRO, 1993).

El segundo de los problemas al que nos enfrentamos, al tratar de solucionar las ecuaciones, es imposible de obviar, aún cuando se incorporen nuevas ecuaciones que intentaran equilibrar el número de las mismas con el número de incógnitas, con el fin de obtener una solución única. Este procedimiento se basa en el manejo de hipótesis físicas sobre la naturaleza de la turbulencia (longitud de mezcla, coeficientes de viscosidad turbulenta...) cuyo principal inconveniente es el alejamiento de las soluciones que se obtengan de la realidad física del fenómeno y cuyo mayor éxito radica en la simplificación de los modelos de resolución y la sencillez de manejo de las ecuaciones a que conduce.

La descomposición de Reynolds introduce realmente una duplicidad de incógnitas por cada magnitud física considerada. De manera que, junto a la no linealidad, nos encontramos frente al fenómeno turbulento en el que su resolución limita mucho las herramientas matemáticas disponibles y utilizables.

Por suerte, en la actualidad se dispone de computadores que, al menos aunque sólo sea en forma numérica y de cálculo, ayudan a la velocidad de resolución. Así pues, y desde las últimas décadas, las técnicas de resolución del problema de la turbulencia se desarrollan fundamentalmente mediante el uso de la matemática de resolución numérica y la computación, pese a las grandes limitaciones de aplicación real que aquella presenta. Lo cual ha supuesto realmente el avance más notable para el conocimiento e incluso la expansión de las aplicaciones teóricas y experimentales que basan su explicación en el régimen de flujos turbulentos no lineales.

En este capítulo trataremos de relatar y referenciar las metodologías, en ningún momento exhaustivamente, que, dentro de las técnicas de computación, se utilizan para la resolución de problemas turbulentos, así como la base matemática que sustenta las aplicaciones más actuales y que nos permitirán el desarrollo de los capítulos posteriores, sobre el problema de la vorticidad turbulenta considerado en esta memoria (PHILIPS, 1956).

III.2 RESOLUCIONES NUMÉRICAS

La imposibilidad de resolución funcional, como hemos especificado, obliga a un tratamiento meramente numérico del sistema de ecuaciones, lo cual se traduce en la disponibilidad en valores cuantitativos discretos de las variables del problema. Lo que, en principio, supone un alejamiento del comportamiento continuo, no está tan lejos de la realidad como pudiera parecer en una primera consideración, ya que las medidas reales que proporcionan los sensores de todas las magnitudes físicas se presentan en forma discreta, aunque la respuesta sea analógica, porque las gráficas construidas por este tipo de sensores trazan curvas de comportamiento uniendo puntos de valoración numérica real mediante interpolaciones físicas o matemáticas a través de arcos de curva.

De hecho, los sensores más actuales, los digitales, cuantifican en forma discreta la medida de las magnitudes físicas y la presentan en intervalos temporales establecidos por los observadores. Aunque los intervalos temporales de toma de datos no tienen porque coincidir con los de observación –de hecho son mucho más “finos”– la amplia gama de intervalos diferenciales de medida sería lo que nos acercaría al comportamiento continuo ideal de la magnitud considerada.

Sentadas las bases de estas consideraciones es relevante destacar que las aproximaciones obtenidas mediante la llamada discretización de las ecuaciones diferenciales que describen un fenómeno, aún cuando realmente contienen pérdida de información para cada problema concreto, es posible que los resultados obtenidos se ajusten suficientemente bien a las necesidades de resolución de un problema dado en cada caso.

Es por esto que la resolución numérica se presenta como una técnica actual de trabajo de suficiente garantía científica y técnica, aunque en sus inicios presentase más inconvenientes que ventajas. Estos inconvenientes se han solucionado con la velocidad de cálculo de los actuales computadores. Ya en la época de Richardson se llevaron a cabo los primeros intentos de cuantificación numérica con objeto de predicción meteorológica (RICHARDSON, 1922), pero fueron ampliamente descartados debido al coste personal y temporal de estas técnicas.

Tomando como base teórica la discretización de las ecuaciones utilizadas en el estudio de la turbulencia en el trabajo de Deardorff (1972), las ecuaciones (de movimiento, por ejemplo) que describían teóricamente el problema quedarían en la forma:

$$\Delta u_i = \left[-\frac{\Delta}{\Delta x_j} \left[\overline{u_i u_j} - K_m \left(\frac{\Delta \overline{u_i}}{\Delta x_j} + \frac{\Delta \overline{u_j}}{\Delta x_i} \right) \right] + \left(\frac{2h\Omega_{i-1}}{u_*} \right) \overline{u_{i+1}} - \left(\frac{2h\Omega_{i+1}}{u_*} \right) \overline{u_{i-1}} - \right. \\ \left. -\delta_{i3} \frac{gh}{u_*^2} \left(\frac{\overline{\rho}}{\langle \overline{\rho} \rangle} - 1 \right) - \frac{\Delta \langle \overline{P} \rangle}{\Delta x_i} - \frac{\Delta \overline{P''}}{\Delta x_i} \right] \Delta t \quad (3.1)$$

Estas expresiones constituyen un sistema de ecuaciones afines. Tomando estas expresiones discretas y aplicándolas para cada punto (las variables aparecen cuantificadas en forma discreta o promediada sobre un conjunto de valores evaluados o propuestos convenientemente) las linealizamos; así:

$$\Delta u_i = \left[-\frac{\Delta}{\Delta x_j} \left[\left(\overline{u_i u_j} \right)_p - K_m \left(\frac{\Delta \overline{u_i}}{\Delta x_j} + \frac{\Delta \overline{u_j}}{\Delta x_i} \right)_p \right] + \left(\left(\frac{2h\Omega_{i-1}}{u_*} \right) \overline{u_{i+1}} \right)_p - \left(\left(\frac{2h\Omega_{i+1}}{u_*} \right) \overline{u_{i-1}} \right)_p - \right. \\ \left. -\delta_{i3} \frac{gh}{u_*^2} \left(\frac{\overline{\rho}}{\langle \overline{\rho} \rangle} - 1 \right)_p - \left(\frac{\Delta \langle \overline{P} \rangle}{\Delta x_i} \right)_p - \left(\frac{\Delta \overline{P''}}{\Delta x_i} \right)_p \right] \Delta t \quad (3.2)$$

siendo p el punto de malla donde se realizan los cálculos.

Como se observa este planteamiento simplifica enormemente la resolución, tras la linealización, pero pierde información a causa de la cuantificación, o del promediado, sobre las variables no calculadas. Esta pérdida de información se traduce, obviamente, en un error de la solución del sistema.

Las sucesivas técnicas de discretización de los sistemas de ecuaciones (ecuaciones de Deardorff) u otros sistemas de comportamiento semejante o parecido se han direccionado normalmente a la minimalización de los errores introducidos como resultado del uso de esta técnica. Algunos de estos errores proceden del tratamiento matemático de truncación de las ecuaciones y pueden ser minimizados mediante la inclusión de condiciones de convergencia como por ejemplo la de

Courant-Friedrich-Lewy, entre otras. Otro tipo de errores procede de la asignación física de valores numéricos para las variables que gobiernan el problema de la turbulencia.

Estos últimos contienen la dificultad de ajustar exactamente las medidas de un sensor a la valoración numérica de la magnitud que estemos midiendo, así como la introducción de artificios físicos (modelizaciones y parametrizaciones) para la resolución de los sistemas de ecuaciones. Tal es, por ejemplo, el caso de las parametrizaciones que el propio modelo de Deardorff introduce para solucionar el problema. Las propuestas que se utilizan se pueden esquematizar así:

$$\langle -w\Theta \rangle = (1-z)^2 \quad (2.3)$$

$$K_m = (c\Delta)^2 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)} \quad (2.4)$$

$$K_h = 3K_m \quad (2.5)$$

$$\overline{u_n' u_n'} = \frac{2}{3} \frac{K_m^2}{(0.09\Delta)^2}, \quad n=1, 2, 3, \quad (2.6)$$

entre otras. Donde $\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$ y c una constante (LILLY, 1967).

El control de todos estos tipos de errores, o lo que es lo mismo, la convergencia de la solución a comportamientos únicos, es absolutamente necesario e imprescindible (al menos deseable) para la aceptación científica o técnica de las soluciones tras la discretización de un sistema de ecuaciones. Muchos de los trabajos que se han desarrollado y que se están desarrollando en la actualidad están planteados con la intención del máximo control posible de dichos errores.

III.3 CONDICIONES DE CONTORNO

Dentro de los análisis de posibles errores en la resolución de las ecuaciones turbulentas deberían ser tenidas en cuenta, como posible fuente añadida, los que procedan de las asignaciones numéricas o funcionales para las denominadas condiciones de contorno o límites, entre las que cabría considerar las correspondientes a las propias de la geometría del problema y las que, desde el punto de vista físico, se introduzcan en cada caso (TERRY, 1991).

No es infrecuente que las condiciones límite impuestas sean de tipo numérico (por ejemplo: velocidad vertical nula en la base de rejilla cuando ésta coincide con la superficie del terreno) o de tipo funcional (como por ejemplo: imposición de un perfil de velocidades horizontales entrando en las caras verticales externas a la rejilla o una propuesta de comportamiento cíclico para las componentes de la velocidad), en ambos casos aplicables asimismo también a la utilización de operadores sobre las variables físicas (ENQUIST y MAJDA, 1979).

De igual manera, es factible imponer para la resolución de las ecuaciones diferenciales otro tipo de condiciones de contorno que intenten acercarnos al comportamiento físico descrito por dichas ecuaciones, por ejemplo las que expresen alguna caracterización física que se imponga o que limite la aplicabilidad en la resolución del problema (base rígida del dominio de integración, base elástica,...) o aquellas que en una localización completa expresen de manera concreta el comportamiento de alguna magnitud física asociada, como por ejemplo la conservación de la energía en un nivel determinado del dominio de integración, o la absorción/reemisión de la misma en algún problema concreto.

Las localizaciones preferentes para la expresión numérica y funcional de las condiciones de contorno contemplan generalmente dos opciones, las denominadas condiciones límite superiores y condiciones límite laterales (CHARNEY et al., 1950).

Dentro de las propuestas para las superiores cabría realizar un esquema de cuatro grandes grupos, a saber:

1. Valoración numérica de alguna variable en un nivel dado (CUXART et. al, 2002).

2. Valoración numérica de alguna variable en el nivel superior del dominio de integración (usualmente descrito con presión nula) (RASCH, 1986).
3. Elección de alguna capa que absorba enteramente la energía que llega a ella (CLARK y HALL, 1991).
4. Elección de alguna capa que permita radiar hacia fuera de ella la energía (KLEMP y DURRAN, 1983).

El grupo de condiciones que cabría encuadrarse dentro de las laterales se puede esquematizar en los siguientes grandes grupos (DAVIES, 1983):

1. *Amortiguación Difusiva*. En este tipo de condición se procuran filtrar las grandes perturbaciones que podrían afectar al desarrollo del problema desde el exterior del dominio de aplicación. Esto se consigue utilizando tamaños de malla mucho menores que la longitud de onda de la perturbación que queremos eludir (MESSINGER, 1977; CLARK y FARLEY, 1984).
2. *Modificación de la Tendencia*. En este grupo de condiciones se especifican las condiciones límite según las cuales determinadas magnitudes físicas que fuera de la malla toman un valor (por ejemplo 1) al terminar la zona límite alcanzan otro valor (por ejemplo 0). La condición se complementa con diferentes propuestas, según distintos autores de la forma interpolada o funcional utilizada para pasar de uno a otro valor (FRITSCH y CHAPPEL, 1980; MADDOX et al., 1981).
3. *Relajación de Flujo*. En estas condiciones se encuadran aquellas que tratan de filtrar por amortiguación determinadas perturbaciones contenidas en el flujo. El procedimiento utilizado normalmente es el de establecer un tamaño de malla suficientemente grande como para que las condiciones se vayan amortiguando a lo largo del espacio, o con el transcurso del tiempo, hasta desaparecer como tales (LESLIE et al., 1981; DAVIES, 1983).
4. *Condiciones de Radiación*. En ellas se expresa el tipo de propagación horizontal de energía radiativa desde la zona de entrada a la zona de salida a la malla de integración (DUYNKERKE et al., 1999).

De todas las condiciones propuestas en este epígrafe unas son utilizables para un tipo de modelo y un problema determinado (por ejemplo, predicción y área limitada) y otras están enfocadas hacia aplicaciones de características muy diferentes (resolución de problemas de microescala de regímenes turbulentos). Lo cual no implica ninguna exclusión concreta a priori, de manera que podemos mezclar la caracterización de las condiciones de contorno para cada problema según nuestras propias necesidades de investigación.

En esta memoria se han utilizado mezcla de las condiciones de contorno descritas para la resolución específica de nuestro problema de evolución de la vorticidad turbulenta asociada a un régimen turbulento.

III.4 ESQUEMAS NUMÉRICOS

Tras la aplicación de los conceptos desarrollados en epígrafes anteriores y dado que lo que se pretende es una solución en forma de integración numérica de las ecuaciones que describan los fenómenos físicos requeridos, se necesita establecer una asignación de valores numéricos para las variables del problema en un estadio inicial del que obtendremos su desarrollo temporal.

Esta asignación numérica, como es lógico, se realiza sobre ubicaciones espaciales discretas (discretización) de las que en las referencias bibliográficas se encuentran multitud de opciones y posibilidades para diferentes aplicaciones físicas. Algunas de las cuales podemos esquematizar a través de la siguiente relación:

- Establecimiento de una red de puntos (malla) de tipo poligonal. De las que, de alguna forma, las más destacadas se presentarían como:
 - Tipo cartesiano
 - Tipo polar
- Adaptación de la malla, en cuanto a su flexibilidad para una mejor representación de la dinámica del problema.
- Distribución de las variables físicas del problema en determinados puntos de la malla, o en otros caracterizados por la estructura de la misma.
- Determinación de la metodología de cálculo para las variables asignadas

III.4.1 ESTABLECIMIENTO DE MALLA

Fundamentalmente los diferentes tipos de sistemas coordenados caracterizan cada uno de los diferentes tipos de malla factibles de ser establecidas, y así, en 2D disponemos de mallas tipo cartesiano, con distribución de celdillas rectangulares (ARAKAWA, 1966; WILLIAMS, 1969) (Fig. 3.1).

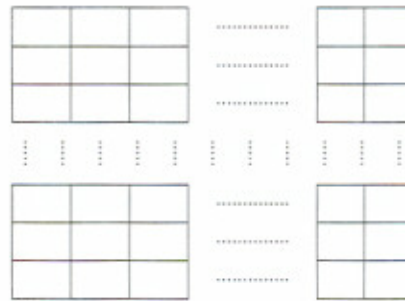


Fig. 3.1- Muestra gráfica de una malla 2D cartesiana.

mientras que el sistema de coordenadas polares utiliza mallas (WILLIAMS, 1969), como las reseñadas con la Figura 3.2.

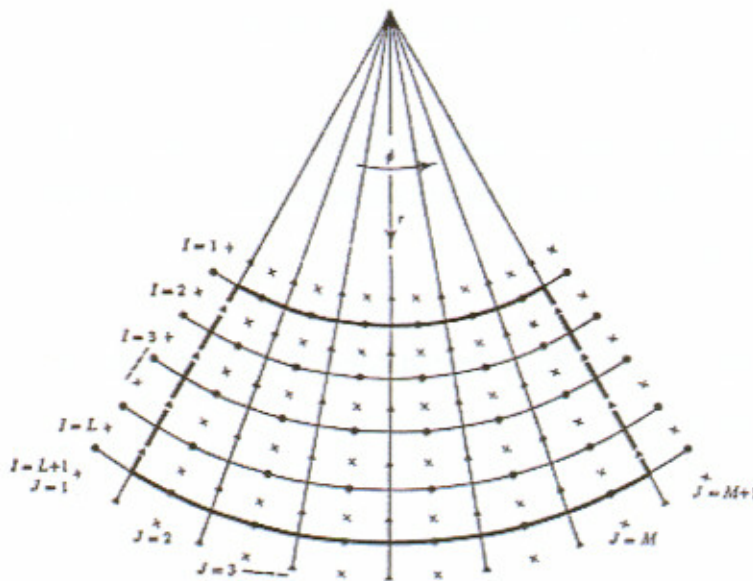


Fig. 3.2- Muestra gráfica de una malla 2D polar.

Una generalización de este tipo de sistemas podría estar constituida por las llamadas mallas poligonales (OH, W. S. et al., 2003) que contienen a las anteriores como caso particular; evidentemente (Fig. 3.3) el aspecto que podría tener alguna de ellas se asemeja a:

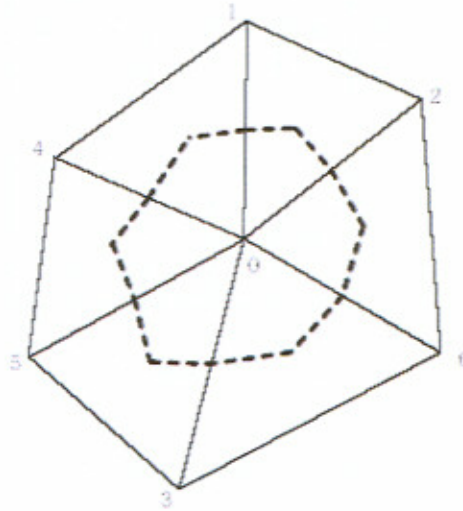


Fig. 3.3- Muestra gráfica de una malla 2D poligonal.

Obviamente esta muestra no es exhaustiva ni lo pretende, simplemente se han puesto de manifiesto diferentes opciones para la construcción de una malla. Las necesidades de cada problema en concreto serán las que determinen el tipo más idóneo de malla para cada caso.

El caso de los problemas tridimensionales (3D) no es más que una ampliación en la que se añade una nueva dimensión a la malla (Fig. 3.4) sobre la que es necesario definir el tipo de distribución de variables (CANUTO y MINOTTI, 1992), que no tiene porque coincidir con las correspondientes a 2D. De hecho, las magnitudes que caracterizan esta tercera coordenada (en general vertical) suelen presentar características numéricas muy distintas de las horizontales. El gran uso de la presión como nueva coordenada (DEARDORFF, 1971), o la altura, a través de la ley fundamental de la hidrodinámica ($dP = -\rho g dz$), confiere a la discretización vertical que los espesores no sean iguales entre sí, aunque correspondan a los mismos intervalos de presión. Este hecho se ve repetido si la asignación corresponde a la coordenada sigma.

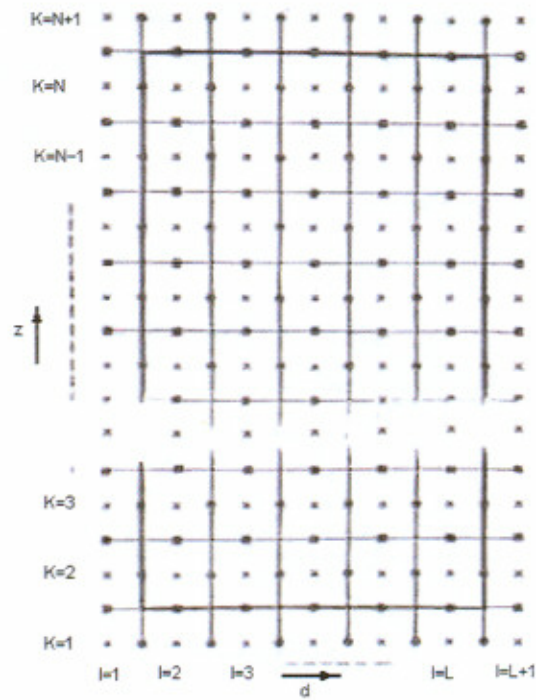


Fig. 3.4- Muestra gráfica de la nueva coordenada en 3D.

III.4.2 ADAPTACIÓN DE LA MALLA

No sólo es necesaria la apropiada elección de una malla según el problema a resolver sino que además es conveniente que el comportamiento de la propia malla se ajuste a las necesidades del problema y al desarrollo de la dinámica del mismo.

En base a estas consideraciones las mallas se adaptan a los problemas de formas enormemente variadas (HAMED, 2007), siempre intentando en cada caso disminuir el error que la interpolación pueda generar (es claro: al crecer el error de las interpolaciones con las distancias entre los puntos, cuanto menores sean éstas mejor será la estimación).

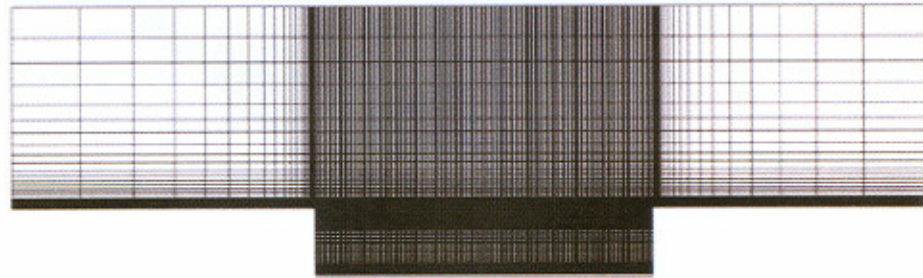


Fig. 3.5- Muestra gráfica de la adaptación de una malla 2D cartesiana mejorada.

Las Figuras 3.5 y 3.6 son dos ejemplos 2D y 3D de las muchas adaptaciones de mallas. Incluso se manejan las denominadas sin estructuras (PAIN et al., 2005) para integraciones concretas y que pueden ser encontradas con relativa facilidad y abundantemente en la bibliografía (TUTAR y OGUZ, 2004).

Los algoritmos que definen la cantidad de puntos añadidos en las cercanías de la zona de estudio (OH, 2003), se encargan asimismo de disminuirlos en las regiones alejadas de dicha zona (Fig. 3.7 y 3.8) (BOHR et al., 1987).

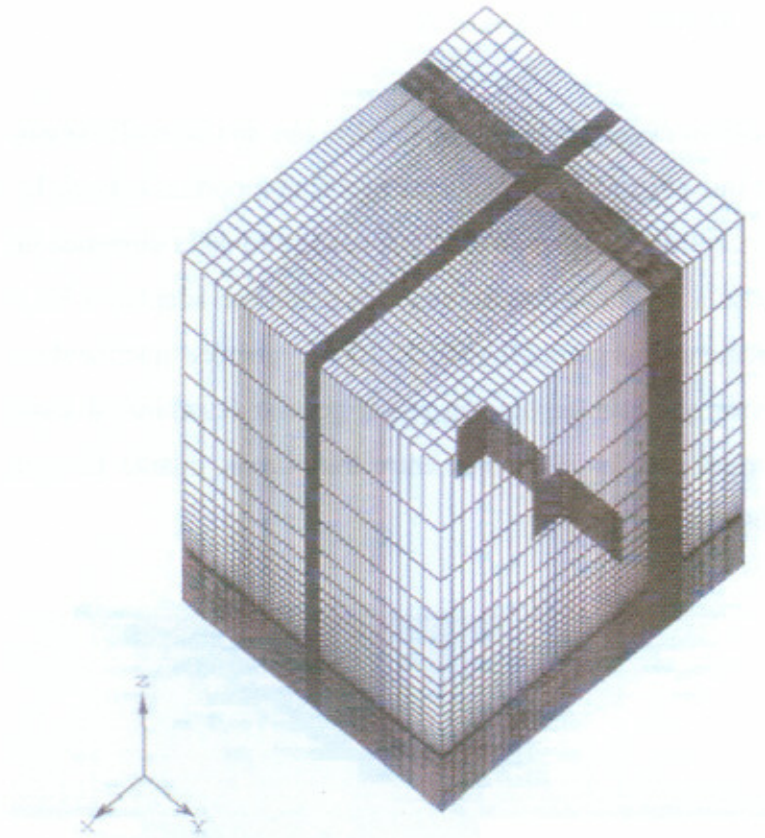


Fig. 3.6- Muestra gráfica de la adaptación de una malla 3D cartesiana mejorada.

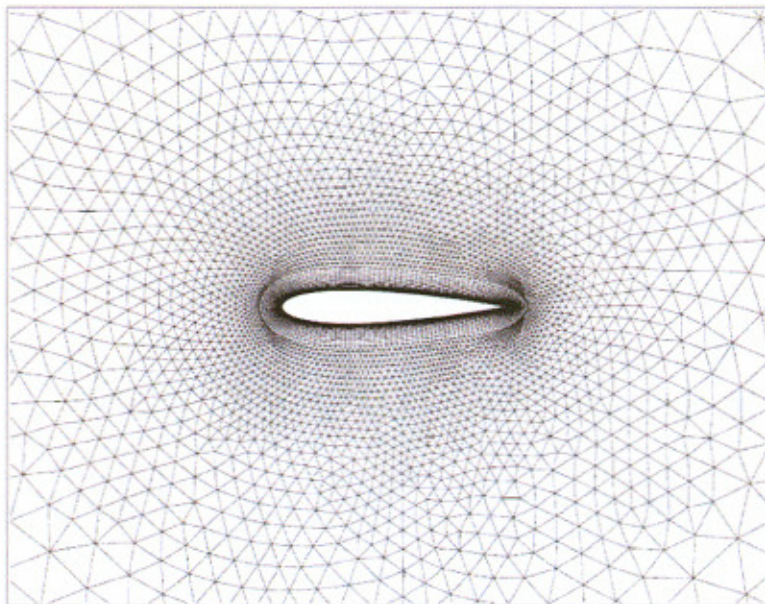


Fig. 3.7- Muestra gráfica de la adaptación de una malla poligonal 2D mejorada.

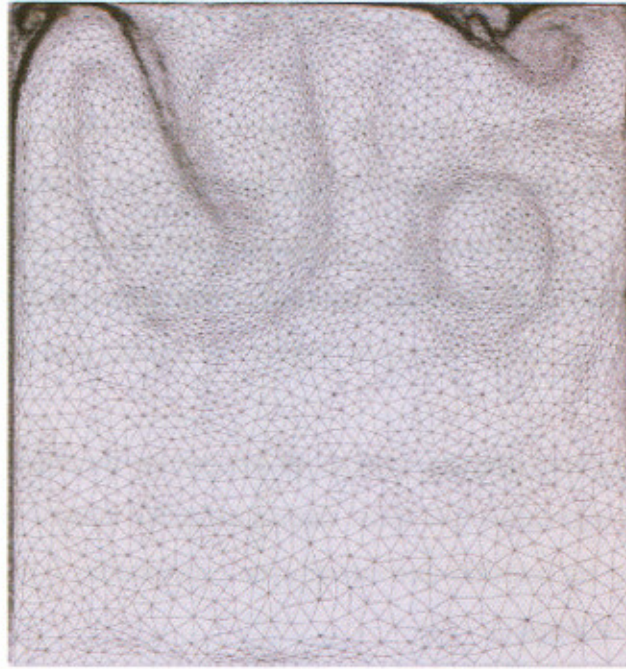


Fig. 3.8- Muestra gráfica de la adaptación de una malla sin estructuras 2D mejorada.

La gran cantidad de posibles adaptaciones de mallas a la infinidad de problemas para los que la mecánica de fluidos utiliza estas técnicas impide una referencia más detallada en este epígrafe, sobre todo teniendo en cuenta que la discretización de la malla propuesta para la resolución de esta memoria es bastante sencilla y será descrita más detalladamente en el capítulo V (YAN et al., 2007).

III.4.3 DISTRIBUCIÓN DE MAGNITUDES FÍSICAS

Una vez establecida la malla sobre la que trabajaremos, así como la discretización sobre la que se aplican los diferentes modelos y dado que la resolución numérica se basa fundamentalmente en la información discreta, que no continua, de las diferentes variables físicas que gobiernen el problema en cada caso, es necesario asignar estos valores discretos en algún lugar o en alguna posición definida por la propia malla.

Algunos autores asignan valores en los puntos de malla, otros en puntos intermedios de los segmentos que unen directamente los puntos de malla, otros en puntos interiores de las celdillas que constituyen estas mallas y otros que combinan las anteriores posibilidades.

Los problemas que nos conciernen sobre la resolución de flujos turbulentos exigen la asignación de valores a las siguientes variables:

Presión	P
Densidad	ρ
Velocidad	(u,v,w) , (u',v',w') o sus modelizaciones y parametrizaciones
Temperatura	T
Viscosidad	ν
Viscosidad Turbulenta	K
(Humedad	q)

así como diferentes otros efectos diferentes basados en estas variables, como por ejemplo:

Efecto de Flotabilidad	B
Efecto de Estratificación	θ (Temperatura Potencial)
Escalar Pasivo	S

y cualquier otro efecto que influya sobre el flujo turbulento y que consideremos necesario ser incluido en este listado.

Desde este punto de vista, los diferentes modelos de integración que podemos encontrar en la bibliografía (Fig. 3.9 – 3.12) difieren en cuales de las variables propuestas se incluyen en el problema y en que posición de la malla se

definen cada una de estas variables. Como ejemplo haremos mención a algún tipo de asignación de variables característico de las integraciones numéricas:

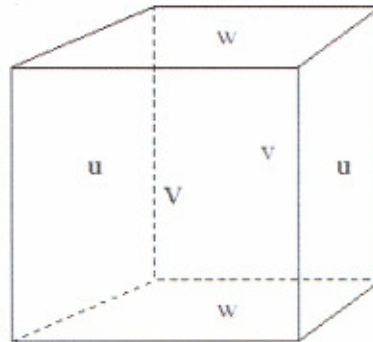
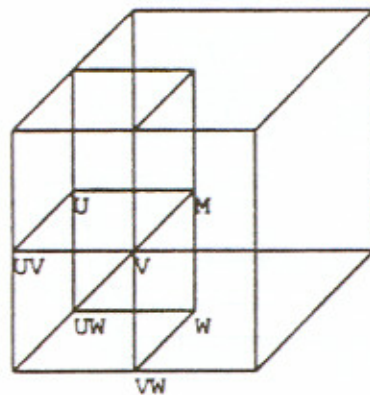


Fig. 3.9- Muestra gráfica de la asignación de variables en una celda unitaria de una rejilla 3D según el tipo c de Arakawa.



	<u>Meso-NH</u>	<u>Turbulence</u>
M	$\theta, \rho, \lambda, \phi, \pi$ r, J, m, f	u'^2, v'^2, w'^2 e, L
V	V, dyy	$H2, Q2, v'S'$
U	U, dxx	$H1, Q1, u'S'$
W	W, dzz	$H3, Q3, w'S', \phi3$
UW	dzx	$u'w'$
VW	dzy	$v'w'$
UV	---	$u'v'$

Fig. 3.10- Muestra gráfica de otra asignación de variables de una rejilla 3D según los modelos Meso NH y Turbulencia.

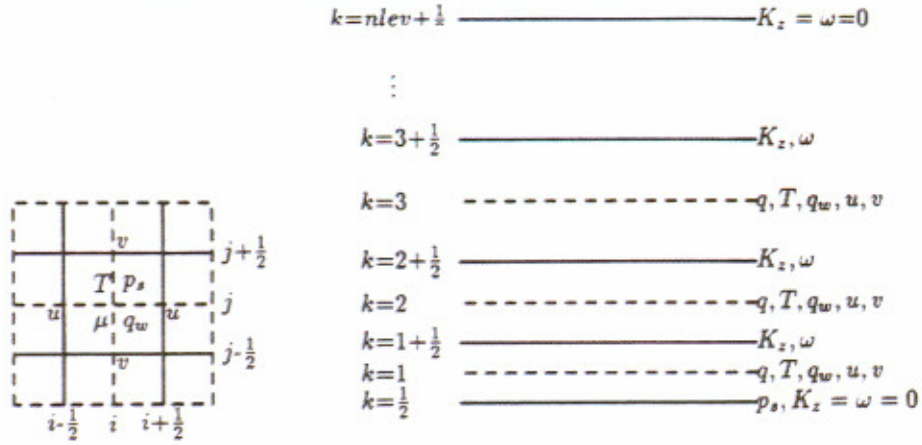


Fig. 3.11- Muestra gráfica de la asignación de variables de una rejilla 2D+D según el modelo de Robertson (ROBERTSON y LANGNER, 1999).

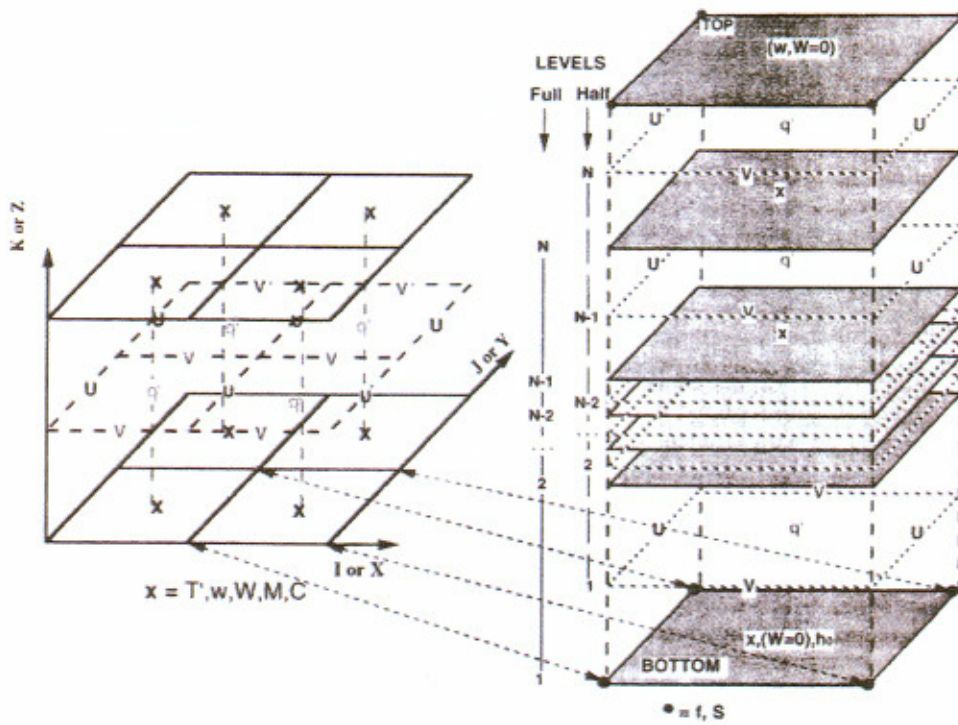


Fig. 3.12- Muestra gráfica de la asignación de variables de una rejilla 3D según el modelo de Benoit (BENOIT et al., 1997).

III.4.4 METODOLOGÍA DE CÁLCULO

A la hora de diseñar la resolución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan los movimientos turbulentos, al igual que con multitud de aplicaciones para otro tipo de escalas de observación –incluso no turbulentas, como podrían ser las de predicción meteorológica– es necesario proponer o elegir una metodología de cálculo acorde con las necesidades de cada problema en particular (REYNOLDS, 1976; MESINGER, 1997).

Es difícil mostrar una evolución cronológica de las propuestas que se encuentran en la bibliografía, ya que muchas de ellas, aún siendo diferentes, son coetáneas; pero continuando con la intención en la exposición de este capítulo y la relación de sus epígrafes podríamos esquematizar los diferentes modelos propuestos en las siguientes formulaciones (JACOBSON, 1999):

- Método de Diferencias Finitas
- Método de Elementos Finitos
- Métodos Espectrales

Las propuestas en función de la posición de los puntos de malla y de los intervalos temporales que se usan en la integración numérica de las ecuaciones (no sólo para problemas turbulentos) pueden esquematizarse en:

- Métodos Eulerianos (DRITSCHER, 1997)
- Métodos Semilagrangianos (KUO y WILLIAMS, 1990; BERMEJO, 1990; DRITSCHER y AMBAUM, 2005)

Estos dos últimos métodos son ampliamente utilizados en la simulación de problemas asociados a la dinámica de fluidos. En la actualidad una gran fracción del esfuerzo investigador se está dirigiendo a la metodología comparativa de ambos. En general el primer grupo funciona mejor para pequeñas escalas temporales, por su posibilidad de aumentar el detalle en la discretización, mientras que para escalas temporales mayores se utiliza preferentemente el segundo grupo de métodos, incluso para aplicaciones climatológicas (MINGHANG y BATES, 1995).

III.4.4.1 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Este conjunto de herramientas matemáticas se basa en una discretización euleriana en la que las funciones que van a ser integradas son descritas en ciertos puntos de rejilla, descomponiéndolas a través de incrementos finitos. En el espacio comprendido entre esos puntos de rejilla el método no aporta ninguna información acerca del comportamiento de la función. Para una variable física X que en el punto p tomase el valor X_p y en el punto q el valor X_q la variación entre ambos puntos vendría establecida simplemente por:

$$\Delta X = X_p - X_q \quad (3.7)$$

Cuestión diferente es el uso que de este cálculo se haga en las ecuaciones de integración y la posición real de los puntos p y q en que se ha definido la variable X . En general las distintas variables de los problemas pueden estar caracterizadas en los puntos de malla establecida o encontrarse en alguna posición relativa en el interior de las celdillas de la propia malla. A título de ejemplo sirva la siguiente muestra (Fig 3.13) (REES y MOBBS, 1990).

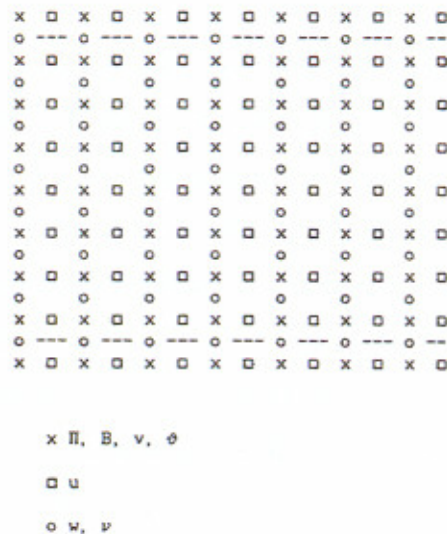


Fig. 3.13- Esquema de asignación numérica para valores de diferentes variables en distintos puntos de una malla.

A la vista de las asignaciones numéricas de las variables físicas y de los cálculos asociados a la metodología está claro que la resolución de la solución se puede mejorar estableciendo un mayor número de puntos entre dos cualesquiera dados, sin alcanzar una saturación de información. Pese a lo cual, es inevitable la comisión de errores de muy diversa índole, entre los que los asociados a la propia truncación van a generar divergencia en dos posibles soluciones para una misma variable y para un mismo problema. Por este hecho, los incrementos deben someterse, entre otras condiciones de restricción, a un límite de validez establecido por la condición de Courant-Friedrich-Lewy (antes mencionada), a saber:

$$\Delta t < K \frac{\Delta x}{U} \quad (3.8)$$

donde Δt es el intervalo de evolución temporal, Δx el paso de malla en la dirección de avance del flujo medio y U la velocidad característica del fluido en dicha dirección.

Asimismo la estabilidad de la solución exige por si sola verificar la condición:

$$\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{8\nu} \quad (3.9)$$

siendo Δt el intervalo temporal de integración, Δx el intervalo espacial de malla y ν la viscosidad cinemática del fluido.

III.4.4.2 METODO DE ELEMENTOS FÍNITOS

A Semejanza de los métodos anteriores y difiriendo de las consideraciones sobre los incrementos finitos, este tipo de herramientas asignan una función concreta para obtener el incremento finito de la variable considerada. Las propuestas funcionales van desde la simple proposición de una variación lineal a la complejidad que supondría la hipótesis de variabilidad sobre la base de funciones polinomiales de grado superior.

La propuesta funcional es muy semejante a la que utilizan los métodos que se describirán en el epígrafe siguiente, pero en este caso la aplicación es local, de manera que, manteniendo la estructura geométrica, ésta puede variar de unos puntos a otros (de unos incrementos a otros).

Si la propuesta concreta fuese la función:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N a_k e_k(x) \quad (3.10)$$

donde a_k son una serie de coeficientes y $e_k(x)$ una función base (Fig 3.14) para cada k , su uso se restringiría a un entorno de un punto determinado (TEMPERTON, 1990).

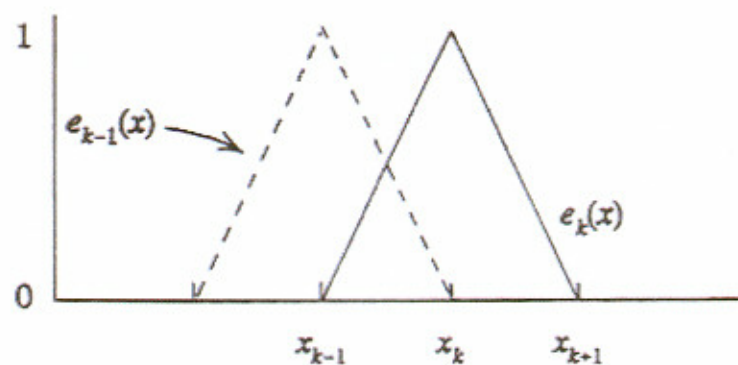


Fig. 3.14- Muestra gráfica de unas funciones base lineales para los elementos finitos.

Las funciones base, $e_k(x)$, son locales, o lo que es lo mismo, no nulas sólo en un pequeño intervalo centrado en el punto en cuestión. Así, un intervalo $[a,b]$ subdividido en subintervalos que definen los puntos de malla, como por ejemplo, $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ presenta como funciones base $e_k(x)$ las definidas por 1 en x_k y 0 en x_{k-1} y x_{k+1} , con una función lineal decreciente entre estos dos valores (Fig. 3.14), siendo nulo su valor en cualquier otro punto de la malla. Funcionalmente:

$$e_k(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (3.11)$$

$$e_k(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, x \in [x_k, x_{k+1}] \quad (3.12)$$

$$e_k(x) = 0, \text{ en cualquier otro punto} \quad (3.13)$$

Una posible extensión de esta herramienta para un conjunto consecutivo de puntos de malla podría ser la construcción entre cada dos puntos de líneas rectas y sus correspondientes funciones lineales cuya respuesta gráfica corresponde a la figura (3.15), convirtiéndose así el conjunto de los segmentos en la función 3.10 (TEMPERTON, 1990).

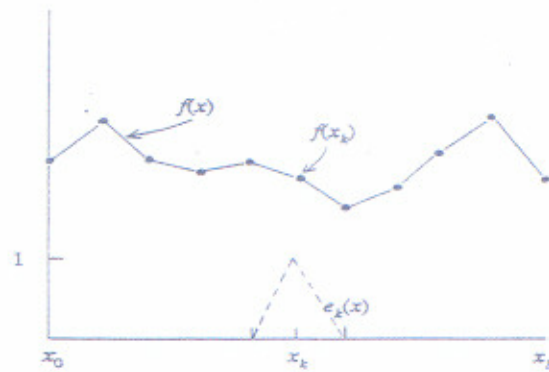


Fig.3.15- Muestra gráfica de una función $f(x)$.

Los párrafos inmediatamente superiores son realmente una muestra concreta del método de elementos finitos, pero no la única. Cabría, por ejemplo, el uso de otras funciones tipos cuadráticos, cúbicos,...

III.4.4.3 METODOS ESPECTRALES

Los dos últimos métodos descritos están basados en representaciones locales de las funciones. A diferencia de ellos, los métodos espectrales utilizan representaciones globales, normalmente a través de desarrollos de Fourier o polinomios ortogonales. La precisión de este método es mucho mayor que la que consiguen alcanzar aquellos. Este hecho genera la posibilidad del uso de mallas con muchos menos puntos, lo que significa, a todas luces, un ahorro de datos, costes computacionales, etc... y la posibilidad de la resolución de problemas de gran escala con menores costes de ordenadores, lo cual los hace idóneos para gran cantidad de resolución de problemas de mecánica de fluidos, y en especial de dinámica de fluidos geofísicos (GOTTLIEB y ORSZAG, 1977; VOIGT et al., 1984; CANUTO et al., 1988; TREFETHEN 1996;).

Presentaremos, en este epígrafe, una relación de algunos métodos espectrales con su base matemática –una vez más sin pretender exhaustividad–, aunque no serán utilizados en el desarrollo de esta memoria. Sin embargo, dada las claras mejoras que ofrece a este tipo de estudios parecería conveniente reseñar un posible campo de investigación futura como continuación de nuestro trabajo.

El concepto básico consiste en el ajuste de desconocidas funciones sobre las que, o de las que, se presenta su comportamiento diferencial a través de base de espacio vectorial de funciones tipo polinomial, trigonométrica, etc, de manera que se proponga que una función $f(x)$ se desarrolle en serie de funciones $\Phi_k(r)$:

$$f(x) = \sum_k a_k \Phi_k(r) \quad (3.14)$$

siendo $\Phi_k(r)$ el conjunto de funciones que constituirían la base del espacio vectorial mencionado y a_k los coeficientes del desarrollo.

Los diferentes métodos de tipo espectral que conforman la bibliografía pueden diferir en dos cuestiones fundamentales: la estructura del sistema coordenado r y las funciones de desarrollo.

La estructura, en cierta medida, ha sido ya mencionada en la descripción de los tipos de malla utilizados para la asignación de variables (figuras 3.9 – 3.12). Especificamos únicamente que los últimos avances en este tipo de investigación

están utilizando mallas no estructuradas de adaptación, incluso mallas con doble estructura adaptativa, dependiendo de la cercanía de la resolución a alguna región concreta de estudio específico (vórtices, perfiles de ala, tuberías, edificaciones...) por lo que es frecuente encontrar simultáneamente la propuesta de mallas adaptativas de tipo triangular que en las cercanías de un obstáculo, por ejemplo, coexistan con mallas de tipo rectangular.

Para un problema concreto y una vez establecida la estructura del sistema coordinado, los trabajos de investigación difieren en la propuesta de desarrollo de funciones apropiadas a cada problema en particular (cuestión más importante que la propia estructuración de mallas) con los correspondientes análisis de errores asociados a la resolución numérica y a la propia propuesta funcional.

Algunas de las propuestas de desarrollo en funciones base más utilizadas en la investigación científica han sido:

- Métodos Espectrales de Chebyshev
- Métodos Espectrales de Legendre
- Métodos Espectrales de Fourier
- Métodos Espectrales de Hermite

Los métodos de Chebyshev, Legendre y Hermite se basan en el ajuste funcional mediante el desarrollo en serie de polinomios de: Chebyshev, Legendre y Hermite, respectivamente, mientras que el método de Fourier utiliza los desarrollos en serie de Fourier en forma trigonométrica o exponencial, usando para ello las perturbaciones cuyas frecuencias se obtienen mediante las transformadas de Fourier de las series de datos de las variables físicas que definen y caracterizan cada problema.

A título de ejemplo las propuestas básicas sobre los polinomios de Legendre se formularían:

$$f(r, s) = \sum_l \sum_m \overline{f_{lm}} \Phi_{lm}(r, s) \quad (3.14)$$

siendo $f(r, s)$ las funciones que se pretende ajustar en una malla triangular de coordenadas (r, s) ; $\overline{f_{lm}}$ los coeficientes de ajuste del desarrollo y Φ_{lm} las funciones

polinómicas de Legendre (nótese el carácter global del ajuste, válido para cada todo punto r, s).

De igual manera la propuesta básica en desarrollos en series de Fourier se formularía:

$$f(r, s) = \sum_k c_k e^{-k^2 s} e^{ikr} \quad (3.15)$$

siendo:

$$F_k(r, s) = c_k e^{-k^2 s} e^{ikr} \quad (3.16)$$

las funciones que constituyen la base del espacio vectorial utilizado.

Obviamente y mediante el desarrollo trigonométrico de e^{ikr} es posible obtener el ajuste con el uso de funciones trigonométricas cuyas frecuencias podrían ser calculadas mediante la aplicación de la transformada de Fourier, como hemos dicho antes.

III.4.4.4 MÉTODOS EULERIANOS

La principal característica que describe estos métodos es que observan la evolución del fluido siempre desde un punto geoméricamente dado e invariable a lo largo del tiempo (BABIN et al., 1996).

La metodología euleriana plantea el cálculo de las derivadas, tanto espaciales como temporales, a través de su aproximación por los incrementos finitos de los puntos de la malla, utilizando diferentes ajustes matemáticos para el cálculo de las mismas y así, por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_p - u_q}{\Delta x} \quad (3.17)$$

siendo p y q dos puntos de malla consecutivos separados por un intervalo Δx . Otra posible regla de cálculo sería:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_p - u_q}{2\Delta x} \quad (3.18)$$

siendo p y q dos puntos de malla no consecutivos separados por un intervalo $2\Delta x$. Estos ajustes están basados en los conocidos cálculos incrementales avanzados (o retrasados) y centrados. Obviamente cualquier otra metodología matemática de cálculo aproximado de derivadas tendría su uso y su correspondiente formulación para la evaluación de los términos de variaciones espaciales en las ecuaciones de Navier-Stokes, o en cualesquiera otras que se utilizaran para la resolución de los diferentes problemas con que nos enfrentásemos.

De igual manera, se podrían evaluar las derivadas temporales y obtener la discretización completa de las ecuaciones utilizadas. Es lógico que el tamaño de las variaciones temporales, pero no sólo ellas, para el cálculo aproximado de derivadas temporales determine el grado de ajuste de la respuesta numérica al fenómeno real estudiado en cada caso.

La aplicación a un sencillo problema de flujos viscosos podría conducir al siguiente tipo de ecuaciones:

$$\frac{N_{i,t} - N_{i,t-h}}{h} = -\frac{(uN)_{i+1,t-h} - (uN)_{i-1,t-h}}{2\Delta x} - k \frac{N_{i+1,t-h} - 2N_{i,t-h} + N_{i-1,t-h}}{(\Delta x)^2} \quad (3.19)$$

si N fuese un campo de velocidades la expresión anterior correspondería a la discretización numérica de Navier-Stokes, en la que el primer miembro corresponde a una derivada temporal, calculada con incrementos retrasados en el tiempo; el primer sumando del segundo miembro procedería de los términos advectivos ($v \cdot \nabla v$) y el segundo término correspondería al efecto viscoso ($\eta \Delta v$), calculados con diferencias centradas en el espacio.

En general, el tamaño de los pasos temporales de integración está determinado por las condiciones de estabilidad a partir del ajuste de oscilaciones gravitacionales mediante términos lineales. Esto es lo que se conoce como esquema semi-implícito.

De nuevo, la primera de las condiciones, ya utilizada, que deben cumplir los esquemas eulerianos es la de Courant-Friedrich-Lewy (CFL) (RITCHIE, 1987):

$$\Delta t < K \frac{\Delta x}{U} \quad (3.20)$$

donde Δx es la distancia entre puntos de rejilla consecutivos, U es la velocidad característica del fluido y K una constante cuyo valor se encuentra cercano a la unidad. Con esta condición aseguramos que los elementos fluidos no avanzan en un paso de tiempo más allá del espacio comprendido entre dos puntos cualesquiera consecutivos de malla.

Asimismo, los términos que evalúan el efecto viscoso (difusivo) llevan consigo una inestabilidad inherente que no puede ser eliminada tan sólo con la condición CFL. Para que los métodos eulerianos eviten el crecimiento de la citada inestabilidad repetimos que se utiliza la siguiente condición (PHILIPPS, 1959; ARAKAWA, 1966; RITCHIE y TANGUAY, 1996):

$$\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{8\nu} \quad (3.21)$$

III.4.4.5 MÉTODOS SEMILAGRANGIANOS

El método lagrangiano observa la evolución del fluido desde el comportamiento dinámico de una partícula fluida y la referencia a las sucesivas posiciones (eulerianas) que ésta tendría a lo largo del tiempo.

La técnica semi-lagrangiana, o de esquemas semi-lagrangianos, intenta retener lo mejor de ambos esquemas, esto es, la estabilidad del sistema euleriano, y el salto temporal del esquema lagrangiano, magnificando la consideración de la estabilidad de las soluciones (CÔTÉ et al., 1990; HUANG, 1997).

El alcance de los pasos temporales de integración es ampliamente mayor que el conseguido mediante el esquema euleriano —excepción hecha de algunos trabajos en los que se evalúa un grado de precisión comparable (LESLIE y DIETACHMAYER, 1997)—, pero presenta la desventaja de una gran dispersión creciente con el transcurso del tiempo de los volúmenes de control, definidos en torno a la partícula característica de los mismos, con lo cual es previsible que los errores crezcan respecto de los que pudieran haber sido obtenidos con un tratamiento euleriano, aún cuando este último hubiera linealizado las oscilaciones gravitacionales (LE ROUX et al., 1997).

Esto se consigue usando diferentes grupos de partículas concretas en el inicio de cada paso temporal (esquema lagrangiano), de manera que las partículas elegidas en el paso inmediatamente anterior a un paso cualquiera deberán alcanzar los puntos de la red cartesiana al finalizar dicho paso (esquema euleriano). Con este conjunto de informaciones sobre los puntos cartesianos de la rejilla se estimarán para el siguiente paso temporal las características de las partículas por interpolación o cualquier otro método de ajuste (de aquí se obtiene la medida de la estabilidad del método) que serán usadas para conseguir los puntos eulerianos en el siguiente paso de tiempo (McDONALD, 1984; SUN y YEH, 1997).

Esta idea, que nace aproximadamente con Fjørtoft (FJØRTOFT, 1952, 1955) y otros, presentaba como condición de validez la expresada por que los números de Courant (RIISHØJGAARD et al., 1998):

$$C = |U| \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.22)$$

fuesen menores que la unidad. Actualmente los esquemas semilagrangianos de advección han modificado su estructura y esta condición no es exigible.

La idea conceptual que subyace en el esquema semilagrangiano es la caracterización euleriana de los puntos de la malla y las partículas de fluido que en un momento determinado se encuentran en los mismos, junto con un análisis de desplazamientos lagrangianos. De manera que una vez conocida la partícula que en un instante dado se encuentra en un punto A y que transcurrido un tiempo $2\Delta t$ pasa a situarse sobre un punto C y supuesta conocida la función $F(x,t)$ que describe la trayectoria se realiza una propuesta de ajuste lineal usando la posición C. Evidentemente la posición de la partícula en cualquier tiempo intermedio se aproximaría mediante la determinación del punto B sobre el ajuste lineal (figura 3.15) (STANIFORTH y CÔTÉ, 1991).

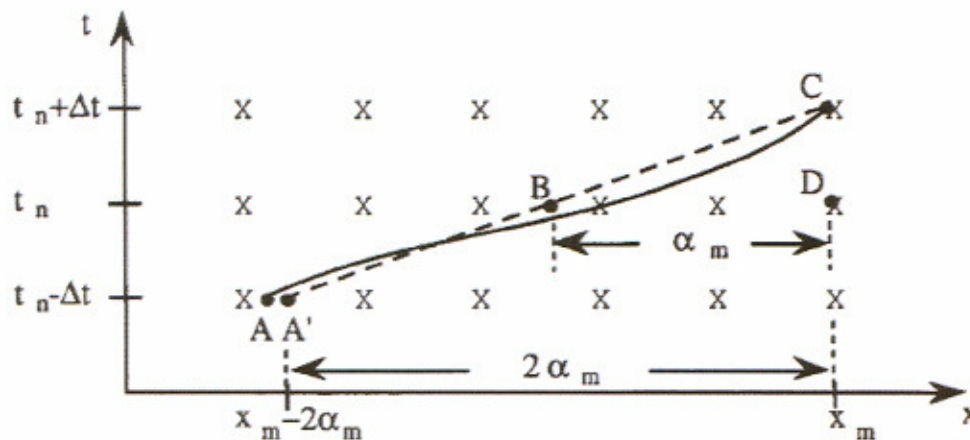


Fig. 3.15- Esquema semilagrangiano de análisis de flujo 1D. Punto A, posición inicial de la partícula. Punto C, posición final. Punto B, posición intermedia obtenida por interpolación sobre la línea discontinua a través del desplazamiento $\alpha_m = U\Delta t$.

La línea discontinua situaría el punto A en un punto A' distinto en el supuesto de un transcurso temporal, $2\Delta t$, equivalente a un desplazamiento espacial, $2\alpha_m$. La diferencia posicional entre A y A' podría usarse como estimación inicial del error que comete el esquema semilagrangiano.

En la resolución numérica que se plantea en esta memoria, como se verá con posterioridad, se manejan fundamentalmente procedimientos (o métodos) eulerianos. En general se ha desarrollado con diferencias centradas y en particular

con avanzadas o retrasadas en los extremos de la malla. La descripción detallada se encuentra en el epígrafe V.2 del capítulo V.

Finalizada la exposición del estado del arte de los capítulos II y III en donde hemos presentado de forma muy esquemática los conocimientos necesarios para la comprensión del trabajo desarrollado en esta memoria iniciamos, a partir del próximo capítulo, la descripción propiamente dicha del trabajo realizado para la consecución de la tesis doctoral.

CAPITULO IV

MODELO TEÓRICO DE TURBULENCIA

IV.1 INTRODUCCIÓN

Tal y como mencionamos en los inicios de esta memoria, el objetivo que nos planteamos para su desarrollo es el de relacionar, hasta donde nos sea posible, la turbulencia y la vorticidad (ambos conceptos fundamentalmente tridimensionales), proponiendo como elemento identificador de las perturbaciones turbulentas: la vorticidad turbulenta, el rotacional de la velocidad o (aunque la denominación no sea muy apropiada) la existencia de vórtices en el flujo, indistintamente.

Comenzaremos, en este capítulo IV, con el planteamiento de las ecuaciones de movimiento, de energía, de continuidad y de difusión desde una perspectiva teórica en la que se incluirá la descomposición de Reynolds ($\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$) del campo de velocidades y del campo de rotacionales para después, en capítulos posteriores, desarrollar un modelo de integración numérica y obtener los resultados correspondientes a la evolución de vórtices propuestos como condiciones iniciales del problema.

Los últimos epígrafes que constituyen este capítulo están constituidos por un conjunto de conclusiones físicas extraídas como aplicación de la teoría propuesta a casos concretos y reales.

Taylor, en 1931, propone el primer intento de interpretación de la turbulencia a través de la vorticidad, con la restricción de haber realizado su propuesta en dos dimensiones, lo cual limita tanto el concepto como las ecuaciones de gobierno y el campo de actuación. De hecho, la vorticidad 2D tiene la propiedad de conservarse en cada nivel, lo que tan sólo sería un caso particular si se trabajase con una generalización del problema con la vorticidad 3D.

Desde 1931 hasta nuestros días, con algún intervalo temporal en el que el tema fue soslayado, han continuado las investigaciones hasta llegar, en la actualidad, al uso de la vorticidad para caracterizar otros conceptos de flujos turbulentos, por ejemplo: helicidad, enstrofia y algunos otros que han mostrado determinadas propiedades como es el caso del efecto de “*dilatación del vórtice*” (TENNEKES y LUMLEY, 1972).

El planteamiento que se realizará admite la modelización semejante a la longitud de mezcla (l) o al planteamiento de coeficientes de viscosidad turbulenta

(K). De hecho, se harán propuestas generalizadoras para estos parámetros que serían extensibles a los coeficientes de intercambio de Smith.

La integración numérica, sin embargo, se llevará a cabo evitando la modelización de las perturbaciones de la velocidad y una posible parametrización que pudiera haber sido utilizada además. Todo esto nos ha conducido a una propuesta teórico-experimental para proceder a la definición y a los sucesivos cálculos de las perturbaciones turbulentas de las diferentes magnitudes asociadas al flujo que sean factibles de ser alteradas por los procedimientos turbulentos.

A lo largo de este capítulo se interpretarán físicamente las diferentes expresiones matemáticas a que se llegue tras la inclusión de la vorticidad y la descomposición de Reynolds.

IV.2 VORTICIDAD

La vorticidad es uno de los parámetros más utilizados en estudios meteorológicos, sobre todo en niveles de meso y macro escalas. Aunque en esta memoria no utilizaremos ese concepto de vorticidad debido a que únicamente se refiere a la componente vertical de lo que sería la vorticidad tridimensional, ni tan siquiera de lo que definiremos, posteriormente, como vorticidad turbulenta.

Como es sabido, llamaremos vorticidad al vector rotacional de la velocidad, de modo que:

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{v} \quad (4.1)$$

siendo $\vec{\xi}$ y \vec{v} los vectores vorticidad y velocidad respectivamente.

Utilizaremos, por sencillez de expresión, las siguientes notaciones:

$$\vec{\xi} = \xi \quad (4.2)$$

y

$$\vec{v} = \mathbf{v} \quad (4.3)$$

siendo $\xi = (\zeta, \eta, \xi)$ y $\mathbf{v} = (u, v, w)$ los vectores y sus correspondientes componentes para la vorticidad y la velocidad respectivamente.

Analíticamente, la relación que existe entre ambos vectores es fácilmente calculable mediante el desarrollo del siguiente determinante:

$$\xi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (4.4)$$

obviamente, las expresiones del último miembro corresponden a las tres componentes del vector vorticidad.

Esta expresión matemática, equivalente al desarrollo del operador ∇ vectorialmente sobre el vector velocidad, es parte de la que constituye el tensor velocidad de deformación, que informa acerca del campo de velocidades en un punto P conocido el mismo en un punto cercano O , tales que:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (4.5)$$

donde $\delta \mathbf{r}$ es el vector posicional del punto P respecto de O y $\nabla \mathbf{v}$ es el tensor velocidad de deformación que puede descomponerse en uno simétrico más otro hemisimétrico de la siguiente forma:

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t}{2} + \frac{\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^t}{2} \quad (4.6)$$

el superíndice t denota el tensor traspuesto para cada operador. El segundo sumando del segundo miembro es la parte hemisimétrica y es a su vez el tensor asociado al rotacional de la velocidad, de manera que:

$$\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^t = ((\xi)) \quad (4.7)$$

Esta clásica expresión puede actualizarse aceptando que el efecto de la descomposición de Reynolds, en promedio más las perturbaciones, es aplicable también a la propia vorticidad, de manera que:

$$\xi = \bar{\xi} + \xi' \quad (4.8)$$

o lo que es lo mismo:

$$\xi = (\bar{\zeta} + \zeta', \bar{\eta} + \eta', \bar{\xi} + \xi') \quad (4.9)$$

Es posible demostrar fácilmente que las relaciones que existen entre las componentes promedias y perturbadas del vector vorticidad y las correspondientes del vector velocidad son:

$$\bar{\zeta} = \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \quad (4.10)$$

$$\bar{\eta} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \quad (4.11)$$

$$\bar{\xi} = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (4.12)$$

para las componentes promedias y:

$$\zeta' = \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \quad (4.13)$$

$$\eta' = \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \quad (4.14)$$

$$\xi' = \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \quad (4.15)$$

para las componentes perturbadas (tesina de licenciatura, GARIJO, 1986).

Para la obtención de estas expresiones basta con utilizar, por ejemplo, el desarrollo del determinante:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

así como, para la primera componente perturbada:

$$\zeta' = \zeta - \bar{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial (w - \bar{w})}{\partial y} - \frac{\partial (v - \bar{v})}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \quad (4.17)$$

c.q.d.

La aplicación de las componentes perturbadas de la vorticidad a problemas de turbulencia totalmente desarrollada en la que, como es normal, se ha llegado a la isotropía ($u' = v' = -w'$) nos permite escribir una interesante propiedad entre ellas, ya que:

$$\zeta' = \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial (-u')}{\partial y} - \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \quad (4.18)$$

$$\eta' = \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial (-u')}{\partial x} \right) \quad (4.19)$$

$$\xi' = \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \quad (4.20)$$

y operando se llega a:

$$\boxed{\zeta' + \eta' - \xi' = 0 \rightarrow \zeta' + \eta' = \xi'} \quad (4.21)$$

esta relación es aún más general que la que se obtuvo en la tesina de licenciatura referenciada.

Todas las expresiones manejadas hasta ahora admiten la inclusión de hipótesis turbulentas generalizadas equivalentes a las teorías de la longitud de mezcla, o a las teorías de los coeficientes de intercambio.

Previamente recogeremos las hipótesis y condiciones de trabajo para la obtención de las expresiones siguientes.

Siendo l_x , l_y y l_z las componentes de un vector longitud de mezcla generalizado para desplazamientos tridimensionales (a diferencia de la longitud de mezcla definida por Prandtl para desplazamientos bidimensionales).

- **CONDICIÓN 1**

$$u' = l_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (4.22)$$

ya que:

- **CONDICIÓN 2**

$$\bar{u} = \bar{u}(y, z) \quad (4.23)$$

- **CONDICIÓN 3**

Uso del sistema coordenado más común en turbulencia, esto es: (x, y, z) , en el que la velocidad media tiene como componentes:

$$\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}, 0, 0) \quad (4.24)$$

Una muestra del uso de estas condiciones sería, por ejemplo, la forma que tomaría la primera de las componentes de la vorticidad turbulenta:

$$\zeta' = \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right) \quad (4.25)$$

Una mezcla de la condición de isotropía, con el sistema coordenado elegido, permitiría escribir una

- **CONDICIÓN 4**

según la cual:

$$\frac{\partial u'}{\partial x, y, z} = \frac{\partial v'}{\partial x, y, z} = -\frac{\partial w'}{\partial x, y, z} \quad (4.26)$$

independientemente de que

- **CONDICIÓN 5**

$$v' = l_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (4.27)$$

$$w' = -l_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (4.28)$$

Es de notar que todas estas condiciones se basan, en principio, en igualdades en el orden de magnitud de las variables.

IV.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Para llegar a obtener la ecuación de movimiento en la que podamos considerar incluido el efecto del rotacional podemos partir de la ecuación para fluido ideal e ir añadiendo los términos que correspondan a las distintas fuerzas o tensiones de los diferentes efectos físicos a ser tenidos en cuenta.

De manera que si aplicamos el operador rotacional a dicha ecuación llegamos a la llamada ecuación de la vorticidad:

$$\frac{d\xi}{dt} = \nabla P \times \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) + \xi \cdot \nabla \mathbf{v} - \xi \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (4.29)$$

siendo ρ la densidad, P la presión y $\nabla \mathbf{v}$ precisamente el tensor velocidad de deformación mencionado anteriormente. En el primer miembro aparecen las variaciones sustanciales de la vorticidad 3D y los sumandos que se encuentran en el segundo miembro corresponden: al grado de barotropía del fluido, a la influencia que el propio campo de velocidades tenga sobre la vorticidad y a las contracciones y dilataciones de los elementos de volumen ($\operatorname{div} \mathbf{v}$), respectivamente.

De los tres sumandos del segundo miembro, para el estudio de regímenes turbulentos, el más importante, conceptualmente, es el tercero, ya que los vórtices sufren contracciones y dilataciones que relacionan íntimamente el carácter tridimensional de la vorticidad y el de la turbulencia. De hecho, si el análisis se hiciera bidimensionalmente la contribución de estos términos a la variación de la vorticidad se anularía (TENNEKES y LUMLEY, 1972).

Por otra parte, la ecuación de movimiento para un fluido incompresible, con viscosidad constante y en el que se puedan despreciar los efectos gravitatorios, de Coriolis e incluso los de viscosidad (particularizada para fluido ideal), sería:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (4.30)$$

o, utilizando las componentes del vector velocidad:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.33)$$

La hipótesis de despreciar dichos efectos es aceptable cuando se pretende llegar a la forma que tomarían las ecuaciones para un flujo turbulento, ya que las escalas de aplicación normalmente son pequeñas en las tres coordenadas y en especial en la vertical (desprecio del efecto de gravitación), independientemente de las dos coordenadas horizontales (desprecio del efecto de Coriolis) y la valoración de las tensiones turbulentas es superior hasta en tres órdenes de magnitud a la viscosidad (desprecio de los efectos viscosos).

Tras las modificaciones convenientes de las ecuaciones 4.31 a 4.33 podemos escribir las expresiones como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) + w\eta - v\xi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) + u\xi - w\zeta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) + v\zeta - u\eta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.36)$$

Si en algún problema en concreto hubieran de ser tenidos en cuenta algunos de los efectos despreciados, bastaría con incluirlos como en cualquiera de las variantes de las ecuaciones de Navier-Stokes. Tal sería el caso, por ejemplo, para el efecto viscoso que aparecería como un término más en el segundo miembro de la forma $+\eta\Delta\mathbf{v}$ y el efecto de gravedad se reflejaría sólo en la ecuación 4.36 como $-\mathbf{g}$.

Utilizando por último: la descomposición de Reynolds para el campo de velocidades, recordando que $\overline{\mathbf{v}'} = (0,0,0)$ para el intervalo temporal de promedio,

haciéndolo extensible al campo de vorticidad y llamando a $\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ energía cinética E_c , obtenemos como ecuaciones de movimiento promediando según la norma usual:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{E}_c) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{E}_c') + \overline{w\eta} + \overline{w'\eta'} - \overline{v\xi} - \overline{v'\xi'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{E}_c) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{E}_c') + \overline{u\xi} + \overline{u'\xi'} - \overline{w\zeta} - \overline{w'\zeta'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{E}_c) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{E}_c') + \overline{v\zeta} + \overline{v'\zeta'} - \overline{u\eta} - \overline{u'\eta'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.39)$$

donde los términos $\overline{w\eta'} = \overline{w'\eta}$ y $\overline{\eta w'} = \overline{\eta' w}$ son nulos en la primera componente y análogamente para las otras dos. Mediante el uso de la condición 3 y estableciendo la estacionariedad para el flujo medio, este sistema queda en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{E}_c) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{E}_c') + \overline{w'\eta'} - \overline{v'\xi'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\bar{E}_c) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{E}_c') + \overline{u\xi} + \overline{u'\xi'} - \overline{w'\zeta'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\bar{E}_c) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{E}_c') + \overline{v'\zeta'} - \overline{u\eta} - \overline{u'\eta'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.42)$$

Asimismo, aplicando las condiciones 2 y 3, para la energía cinética media y deshaciendo parcialmente los pasos que dieron lugar a las ecuaciones 4.34:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{E}_c) = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\bar{E}_c) = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\bar{E}_c) = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (4.45)$$

llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{E'_c}) + \overline{w'\eta'} - \overline{v'\xi'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\overline{E'_c}) + \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{u\xi'} + \overline{u'\xi'} - \overline{w'\zeta'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\overline{E'_c}) + \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \overline{v'\zeta'} - \overline{u\eta'} - \overline{u'\eta'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.48)$$

O lo que es lo mismo, en forma vectorial (ANEXO I):

$$\boxed{\nabla(\overline{E'_c}) + \nabla \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{v}} + \overline{\xi} \times \overline{\mathbf{v}} + \overline{\xi' \times \mathbf{v}'} = -\frac{\nabla P}{\rho}} \quad (4.49)$$

Mediante el algebra tensorial apropiada (ANEXO I), se puede escribir más sencillamente, en la forma:

$$\boxed{\nabla(\overline{E'_c}) + \overline{\mathbf{v}} \nabla \overline{\mathbf{v}} + \overline{\xi' \times \mathbf{v}'} = -\frac{\nabla P}{\rho}} \quad (4.50)$$

Ecuación de Movimiento para Régimen Turbulento con Vorticidad Turbulenta

En estas dos últimas expresiones, variantes de la ecuación de movimiento, los sumandos que constituyen el primer miembro dan cuenta de las variaciones espaciales de la energía cinética turbulenta perturbada disponible y de efectos advectivos de transporte en los productos con el vector velocidad o con el vector velocidad perturbada, de manera que están mostrando, fundamentalmente, las variaciones espaciales de los transportes de vorticidad. Estos transportes –que se verifican en direcciones perpendiculares a los planos definidos por los vectores \mathbf{v} y ξ – podríamos nominarlos como transportes transversales tanto para los propios campos vectoriales como para los efectos de perturbación que la turbulencia induce en ellos.

Un mayor detalle que nos facilita la interpretación asociada al último sumando del primer miembro de ambas ecuaciones podría construirse de la siguiente

manera. Una de sus componentes es $\overline{\rho w' \eta'}$, cuya lectura física se puede obtener como sigue: si $\delta\sigma$ fuese una superficie perpendicular a la dirección z , entonces el volumen de fluido transportado en esta dirección durante un tiempo dt atravesando esta superficie sería $w' \delta\sigma dt$, ya que el sistema coordenado mantiene como campo de velocidad $(\bar{u}, 0, 0)$. Este elemento infinitesimal de fluido es transferido desde su posición original a una posición final a la que llega con una cantidad de movimiento por unidad de volumen $\rho \mathbf{v}'$ y una cantidad de vorticidad, también por unidad de volumen, que si suponemos $\nabla \rho = 0$ puede ser calculada como:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\rho \mathbf{v}') &= \rho \nabla \times \mathbf{v}' = \rho \left\{ \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} = \\ &= \rho \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)' \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)' \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)' \mathbf{k} \right\} = \rho (\nabla \times \mathbf{v})' = (\rho \nabla \times \mathbf{v})' = \\ &= (\nabla \times (\rho \mathbf{v}))' \end{aligned} \quad (4.51)$$

Obviamente la componente y de la cantidad de vorticidad transportada en la dirección z es $\rho w' \eta' \delta\sigma dt$. De esta manera queda justificado que el término $\overline{\rho w' \eta'}$ informa del transporte medio por unidad de tiempo y superficie de la componente y de la cantidad de vorticidad perturbada según la dirección z . El efecto vectorial completo del intercambio de vorticidad es, tal y como habíamos explicado, $\overline{\rho \xi' \times \mathbf{v}'}$.

Comparando las ecuaciones 4.30 y 4.50, se observa claramente cómo la introducción de la descomposición de Reynolds ha generado los efectos $\nabla(\overline{E_c}) + \overline{\xi' \times \mathbf{v}'}$ ya que la advección $\bar{\mathbf{v}} \nabla \bar{\mathbf{v}}$ y el segundo miembro constituirían la ecuación original de movimiento en régimen estacionario, una vez promediada. Es evidente que, a través de estos sumandos, estamos mostrando la interacción entre la turbulencia y la vorticidad, base conceptual de toda esta memoria.

IV.3.1 ALGUNAS APLICACIONES DE MODELIZACIÓN

Aunque el objetivo de esta memoria no es el manejo de modelizaciones, dado que el uso técnico y experimental de las ecuaciones de movimiento en régimen turbulento pasa normalmente por estas técnicas para la resolución de problemas específicos, en este apartado mostraremos algunas modelizaciones, o mejor aún la generalización de algunas de ellas utilizables para el sistema de ecuaciones que ha sido obtenido hasta el momento.

Partimos, por ejemplo, de la propuesta funcional de Prandtl para la introducción del concepto de velocidad de fricción:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_{zx}}{\rho}} = \sqrt{|-u'w'|} \quad (4.52)$$

donde τ_{zx} es la tensión turbulenta o de Reynolds y que, como aplicación especial para la capa superficial atmosférica, resulta ser una constante (aceptando como tal una variación relativa de $\pm 10\%$).

Con esta propuesta es admisible una generalización de la velocidad de fricción para las posibles diferentes componentes de la tensión turbulenta τ_{zx} , τ_{zy} y τ_{zz} a un modelo tridimensional, \mathbf{u}_0 (vector), cuyas componentes vendrían definidas por:

$$u_{0x} = \sqrt{|-u'w'|} = \frac{\tau_{zx}}{\rho} \quad (4.53)$$

$$u_{0y} = \sqrt{|-v'w'|} = \frac{\tau_{zy}}{\rho} \quad (4.54)$$

$$u_{0z} = \sqrt{|-w'w'|} = \frac{\tau_{zz}}{\rho} \quad (4.55)$$

es decir: $\mathbf{u}_0 = (u_{0x}, u_{0y}, u_{0z})$.

La ecuación de movimiento 4.30 se transforma convenientemente en:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}'} \quad (4.56)$$

puesto que se verifica la ecuación de continuidad ($\text{div} \mathbf{v} = 0$), ídem con la componente perturbada ($\text{div} \mathbf{v}' = 0$).

Si establecemos el caso de flujo estacionario, con el sistema de ejes utilizado, las tres componentes pueden ser escritas como:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \quad (4.57)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \quad (4.58)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{w'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{w'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \quad (4.59)$$

utilizando tan solo la condición de isotropía de la turbulencia completamente desarrollada podemos escribir:

$$\overline{u'u'} = \overline{u'v'} = \overline{w'w'} = \overline{v'v'} = -\overline{v'w'} = -\overline{u'w'} \quad (4.60)$$

La modelización propuesta en los párrafos anteriores mediante el vector \mathbf{u}_0 , para el que se cumple $u_0^2 = \frac{\mathbf{u}_0^2}{3}$, aceptando que las tres componentes de la velocidad perturbada modularmente son iguales y extendiendo esta igualdad a las tres componentes del vector \mathbf{u}_0 ($u_{0x}^2 = u_{0y}^2 = u_{0z}^2 = u_0^2$) esta ecuación quedaría en la forma:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x}(u_0^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u_0^2) - \frac{\partial}{\partial z}(u_0^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \\
 & \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(u_0^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u_0^2) - \frac{\partial}{\partial z}(u_0^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \\
 & \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(u_0^2) - \frac{\partial}{\partial y}(u_0^2) + \frac{\partial}{\partial z}(u_0^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

**Ecuación de Movimiento Modelizada mediante el Vector Velocidad de Fricción
 u_0 para Régimen Turbulento con Vorticidad Turbulenta**

Presentaremos ahora otro sistema de ecuaciones utilizando una modelización semejante a la de la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl extendida a la tridimensionalidad de los fenómenos turbulentos.

Para lo cual podemos, en principio, evaluar las derivadas espaciales de u_0^2 en función del resto de los parámetros de las funciones que, operados convenientemente, conducen a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_0^2) = \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u'w'}) = -\overline{u' \frac{\partial w'}{\partial x}} - \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial x}} = -2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial x}} \tag{4.62}$$

y de igual manera:

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_0^2) = -\overline{u' \frac{\partial w'}{\partial y}} - \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial y}} = -2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial y}} \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(u_0^2) = -\overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} - \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = -2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} \tag{4.64}$$

habiendo utilizado nuevamente la condición de isotropía de la turbulencia totalmente desarrollada.

Usando estas expresiones, el conjunto de ecuaciones 4.61 quedaría entonces:

$$\begin{aligned}
 & -2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial x}} - 2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial y}} + 2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} \\
 & \overline{u \frac{\partial v}{\partial x}} - 2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial x}} - 2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial y}} + 2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} \\
 & \overline{u \frac{\partial w}{\partial x}} + 2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial x}} + 2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial y}} - 2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Obviamente la obtención de este sistema de ecuaciones sería factible de forma directa actuando sobre el sistema 4.57-4.59.

La modelización, ya mencionada en párrafos anteriores, que consistía en la extensión tridimensional de la hipótesis de la longitud de mezcla de Prandtl, conduciría a un vector dado por:

$$\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z) \tag{4.66}$$

El significado de esta propuesta se observa trivialmente en la siguiente figura:

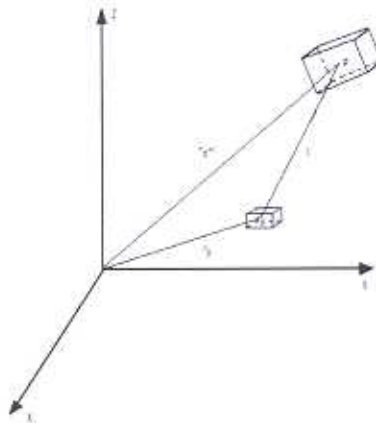


Fig. 4.1- Muestra gráfica del desplazamiento l generalizado 3D de un eddy.

donde $l_x = l_x(x)$, $l_y = l_y(y)$ y $l_z = l_z(z)$.

Tomando además las condiciones 1, 2 y 3, los diferentes términos no advectivos de flujo medio, que aparecen en los primeros miembros de las ecuaciones de este último sistema, pueden definitivamente expresarse como:

$$2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial x}} = -2 \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \left(l_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + l_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.67)$$

$$2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial y}} = -2 \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (4.68)$$

$$2\overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = -2 \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (4.69)$$

Con lo que el sistema de ecuaciones quedaría modelizado con la longitud de mezcla generalizada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & 2 \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \\ & \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + 2 \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \\ & \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - 2 \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Ecuación de Movimiento Modelizada mediante el Vector Longitud de Mezcla Generalizado para Régimen Turbulento con Vorticidad Turbulenta

Las condiciones utilizadas y el sistema obtenido muestran fácilmente que existe una relación entre las componentes del gradiente de presión, ya que operando convenientemente:

$$\boxed{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}} \quad (4.71)$$

Finalmente, como colofón, con el uso de la vorticidad turbulenta y más concretamente de la componente perturbada, el sistema podría reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \overline{2w'(\xi' + \eta')} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \\
 \overline{u \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{2w'(\xi' + \eta')} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \\
 \overline{u \frac{\partial w}{\partial x}} - \overline{2w'(\xi' + \eta')} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{4.72}$$

Ecuación de Movimiento Modelizada mediante la Componente Perturbada de la Vorticidad Turbulenta para Régimen Turbulento

En estas expresiones se observa, claramente, que el campo de tensiones internas $(-\frac{\nabla P}{\rho})$ se ve equilibrado por efectos advectivos del flujo medio y efectos turbulentos asociados a los transportes de vorticidad. El uso de este tipo de ecuaciones para problemas concretos exigiría la implementación de los términos funcionales correspondientes a aquellas fuerzas, aplicadas e internas, que afectarían al problema real en cada caso.

En párrafos anteriores se especificó que, aunque está fuera de la intención de la memoria, sería factible elaborar modelizaciones como la que acabamos de diseñar en función de la longitud de mezcla generalizada o, continuando con el paralelismo con los procesos difusivos moleculares y los que tienen lugar en régimen turbulento, suponer que el transporte medio de una magnitud en una dirección dada puede expresarse en función de coeficientes de intercambio generalizados o de coeficientes de viscosidad cinemática turbulenta generalizada.

Según las propuestas de las referencias bibliográficas los coeficientes de intercambio se generalizan a un tensor, de manera que se establecen igualdades basadas en la consideración anterior; por ejemplo:

$$-\rho \overline{w' \eta'} = a_{yz} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z} \quad (4.73)$$

Expresión que extendida a todos los posibles transportes de vorticidad conduciría al tensor mencionado:

$$\begin{pmatrix} -\rho \overline{u' \zeta'} & -\rho \overline{v' \zeta'} & -\rho \overline{w' \zeta'} \\ -\rho \overline{u' \eta'} & -\rho \overline{v' \eta'} & -\rho \overline{w' \eta'} \\ -\rho \overline{u' \xi'} & -\rho \overline{v' \xi'} & -\rho \overline{w' \xi'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} & a_{xy} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} & a_{xz} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \\ a_{yx} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} & a_{yy} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} & a_{yz} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z} \\ a_{zx} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} & a_{zy} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} & a_{zz} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

En donde, como se observa, se han descrito los diferentes transportes de las componentes de la vorticidad por la velocidad en términos de flujo medio, o lo que es lo mismo, de vorticidades medias.

Esta relación se podría hacer extensiva sin más que proponer, por ejemplo:

$$K_{xz} = \frac{a_{xz}}{\rho} \quad (4.75)$$

y de igual manera, al resto de los coeficientes de viscosidad cinemática turbulenta:

$$\begin{pmatrix} -\rho \overline{u' \zeta'} & -\rho \overline{v' \zeta'} & -\rho \overline{w' \zeta'} \\ -\rho \overline{u' \eta'} & -\rho \overline{v' \eta'} & -\rho \overline{w' \eta'} \\ -\rho \overline{u' \xi'} & -\rho \overline{v' \xi'} & -\rho \overline{w' \xi'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho K_{xx} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} & \rho K_{xy} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} & \rho K_{xz} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \\ \rho K_{yx} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} & \rho K_{yy} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} & \rho K_{yz} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z} \\ \rho K_{zx} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} & \rho K_{zy} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} & \rho K_{zz} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

IV.4 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

La construcción, lo más completa posible, de la teoría que estamos desarrollando, exige que propongamos ecuaciones para la energía, para la continuidad y para la difusión, además de las ecuaciones de movimiento, con la inclusión de los efectos de rotación sobre los que, como acabamos de hacer, de nuevo efectuaremos la descomposición de Reynolds, es decir, valores medios más perturbados.

En este epígrafe presentaremos la expresión que, tras los cálculos oportunos, toma la ecuación de la energía, teniendo en cuenta que a las energías mecánicas, hasta ahora utilizadas, añadiremos la energía térmica desde el Primer Principio de la Termodinámica, ya que la toma de energía para desarrollo turbulento puede proceder de fuentes térmicas y la eliminación de la energía se realiza mediante la transformación en calor de la fricción molecular.

Partimos de la evaluación de las energías mecánicas puestas en juego en un movimiento fluido, o lo que es lo mismo, presentaremos como punto de partida la ecuación de Bernouilli generalizada, que en su forma diferencial sería:

$$d\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi\right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} + \frac{P}{\rho^2} d\rho - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.77)$$

Los símbolos utilizados para las magnitudes dinámicas son de sobra conocidos y especificaremos únicamente que φ sería el potencial del que derivarían las fuerzas aplicadas al sistema que tuvieran esa característica física; normalmente φ engloba los efectos gravitatorios.

En forma finita, la integración conduce a:

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi\right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \Delta\mathbf{l} - \frac{P}{\rho} \Delta\rho - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \Delta\mathbf{l} = 0 \quad (4.78)$$

Para llegar a esta expresión es necesario el uso del teorema del promedio integral en la integración de los sumandos segundo y cuarto. Si utilizamos una unidad de desplazamiento para simplificar la expresión:

$$\Delta \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi \right) = -\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{P}{\rho} \Delta \rho + v_i \times (\nabla \times v_i) \quad (4.79)$$

donde v_i es la proyección del vector velocidad sobre el elemento $d\mathbf{l}$.

$\beta = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi$ es la llamada función de Bernouilli, es decir:

$$\Delta \beta = -\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{P}{\rho} \Delta \rho + v_i \times (\nabla \times v_i) \quad (4.80)$$

Como es sabido, diferentes particularizaciones de esta expresión se utilizan para muy diversos problemas físicos como la primera aproximación a la dinámica de los fluidos. El caso más sencillo es el de un flujo estacionario, irrotacional y homogéneo, para el que la expresión queda:

$$\beta = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi = cte \quad (4.81)$$

La función β permanece constante sobre las trayectorias de las partículas o sobre las líneas de corriente, ya que la condición de estacionariedad obliga a que sean las mismas.

Estas expresiones contienen la conservación de la energía desde el punto de vista dinámico. Tal y como se ha mencionado, mediante el uso del primer principio de la termodinámica plantearemos la ecuación de la energía y así:

$$\delta Q = dU + PdV = C_v dT + PdV = C_v dT + Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = C_v dT - \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (4.82)$$

Operando esta expresión junto con la 4.77:

$$\delta Q = d \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi \right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} + C_v dT \quad (4.83)$$

$$\delta Q = d \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi + C_v T \right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \quad (4.84)$$

Mediante el uso de la descomposición de Reynolds tanto para el campo de velocidades como para el campo de vorticidades, nuevamente para flujos estacionarios y adiabáticos, y tras la integración oportuna la ecuación quedaría:

$$\boxed{\frac{\overline{\mathbf{v}^2}}{2} + \frac{\overline{\mathbf{v}'^2}}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi + C_v T = \int_L (\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\boldsymbol{\xi}}) \cdot d\mathbf{l} + \int_L (\overline{\mathbf{v}'} \times \overline{\boldsymbol{\xi}'}) \cdot d\mathbf{l}} \quad (4.85)$$

Ecuación de Energía para Régimen Turbulento con Vorticidad Turbulenta

Esta expresión, que constituye la ecuación de la energía, se ha obtenido considerando que los movimientos fluidos relacionan la energía en dos puntos P_1 y P_2 de la trayectoria (L) de las partículas fluidas. La diferencia más importante, así como el aporte en esta expresión, corresponde a la evaluación física del uso de las energías mecánica y térmica para el mantenimiento del campo de rotación de las partículas.

Estas últimas formas de la ecuación de la energía conducen, en el caso de flujos estacionarios y adiabáticos, a definir una función β_{rot} (generalización de la de Bernouilli) como:

$$\boxed{\beta_{rot} = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + C_v T + \varphi - \int_L (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} = cte} \quad (4.86)$$

o para regímenes turbulentos (bajo las mismas condiciones), una β_{RT} :

$$\boxed{\beta_{RT} = \frac{\overline{\mathbf{v}^2}}{2} + \frac{\overline{\mathbf{v}'^2}}{2} + \frac{P}{\rho} + C_v T + \varphi - \int_L (\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\boldsymbol{\xi}}) \cdot d\mathbf{l} - \int_L (\overline{\mathbf{v}'} \times \overline{\boldsymbol{\xi}'}) \cdot d\mathbf{l} = cte} \quad (4.87)$$

En esta última expresión la interpretación física de los diferentes sumandos es la misma que para la ecuación 4.85.

Un tratamiento paralelo a éste que presenta algo más de complejidad se podría haber establecido mediante la división del campo de velocidades en campos de traslación más campos de rotación (ω), es decir $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{tr} + \omega \times \mathbf{r}$. Esta vía caracterizaría la rotación aplicada sólo a la segunda componente $\omega \times \mathbf{r}$, ya que la rotación del primer sumando tiene que ser nula por definición.

Con estas consideraciones más la descomposición de Reynolds aplicada a todos los campos cinemáticos la ecuación de la energía quedaría en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathbf{v}_{tr}^2}}{2} + \frac{\overline{\mathbf{v}'^2}}{2} + \frac{\overline{(\omega \times \mathbf{r})^2}}{2} + \frac{\overline{(\omega' \times \mathbf{r})^2}}{2} + \overline{\mathbf{v}_{tr} \cdot (\omega \times \mathbf{r})} + \overline{\mathbf{v}'_{tr} \cdot (\omega' \times \mathbf{r})} + \frac{P}{\rho} + C_v T + \varphi = \\ = \int_L \left[\overline{\mathbf{v} \times \nabla \times (\omega \times \mathbf{r})} + \overline{\mathbf{v}' \times \nabla \times (\omega' \times \mathbf{r})} \right] \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (4.88)$$

IV.5 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Es de esperar que, al igual que las ecuaciones de movimiento se han visto modificadas por el efecto de la vorticidad, o lo que es lo mismo la rotación de las partículas fluidas, la ecuación de continuidad se vea también afectada, dado que el campo de velocidades se encuentra en el interior de la forma analítica de la misma.

Recordemos que una de las formas analíticas clásicas de la ecuación de continuidad (expresando la conservación de la masa) es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v}) \quad (4.89)$$

Utilizando la última descomposición del campo de velocidades del epígrafe anterior en traslación y rotación, es decir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{tr} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4.90)$$

en esta expresión podemos razonadamente asemejar la rotación $\boldsymbol{\omega}$ con el rotacional de las partículas fluidas que venimos manejando. Es necesario una condición añadida sin restricciones a esta identificación, a saber: las rotaciones de las partículas fluidas en un elemento de volumen infinitesimal son solidarias, por lo que:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \quad (4.91)$$

Esta expresión permite relacionar las componentes de ambos vectores, siendo entonces:

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \quad (4.92)$$

Con estos cálculos reescribiremos la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v}_{tr}) - \frac{1}{2} \text{div}(\rho \xi \times \mathbf{r}) \quad (4.93)$$

desarrollando:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v}_{tr}) - \frac{1}{2} \text{div}((\rho \xi)_c \times \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \text{div}(\rho \xi \times \mathbf{r}_c) \quad (4.94)$$

con el subíndice c se quiere especificar el comportamiento de constancia frente al operador divergencia. Con ello:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v}_{tr}) - (\xi \times \mathbf{r}_c) \cdot \frac{\nabla \rho}{2} - \frac{\rho}{2} \text{div}(\xi \times \mathbf{r}_c)} \quad (4.95)$$

Ecuación de Continuidad con Vorticidad Turbulenta

Obviamente esta expresión recoge como caso particular a fluidos con flujos irrotacionales.

La introducción de la descomposición de Reynolds para la obtención de la ecuación de continuidad en régimen turbulento conduce a:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \overline{\mathbf{v}_{tr}}) - (\overline{\xi} \times \mathbf{r}_c) \cdot \frac{\nabla \rho}{2} - \frac{\rho}{2} \text{div}(\overline{\xi} \times \mathbf{r}_c)} \quad (4.96)$$

Ecuación de Continuidad para Régimen Turbulento con Vorticidad Turbulenta

A esta identificación con la expresión anterior, con la salvedad de los valores medios, se llega a causa de que el campo de densidades se está suponiendo independiente de la turbulencia y los valores medios de las perturbaciones del campo de velocidades y del campo de vorticidades son nulos ($\overline{\mathbf{v}'} = \overline{\xi'} = 0$).

Este resultado confirma y convalida la hipótesis que en muchos problemas de turbulencia se utiliza sobre la constancia de la densidad frente a las perturbaciones

que induciría la turbulencia (hipótesis de la computación de esta memoria, Capítulo V). Excepción hecha de aquellos problemas donde la convección sea fundamental y en los que las variaciones de la densidad afecten a los movimientos verticales por efectos de flotabilidad (condición de Boussinesq).

IV.6 ECUACIÓN DE DIFUSIÓN

Con el objeto de continuar con la filosofía de este capítulo, esto es, la obtención independiente del efecto de rotación del campo de velocidades, vamos a plantear la ecuación de difusión de una magnitud másica S , que por unidad de volumen tendría la forma ρS partiendo de la ecuación clásica, es decir:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v} S) \quad (4.97)$$

Continuamos con el uso de la descomposición para rotación y traslación $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Si la rotación además fuese solidaria $\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}$; con lo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} &= -\text{div}(\rho \mathbf{v}_r S) - \frac{1}{2} \text{div}(\rho(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}) S) = \\ &= -\rho \mathbf{v}_r \nabla S - S \text{div}(\rho \mathbf{v}_r) - \frac{1}{2} \rho(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}) \nabla S - \frac{1}{2} S \text{div}(\rho(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r})) = \\ &= -\rho \mathbf{v}_r \nabla S - \frac{1}{2} \rho(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}) \nabla S - S \text{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.98)$$

como $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v})$; operando:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathbf{v}_r \nabla S - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}) \nabla S} \quad (4.99)$$

Ecuación de Difusión con Vorticidad

El uso para regímenes turbulentos, una vez más, se realizará mediante la aplicación a las expresiones obtenidas de la descomposición de Reynolds, tanto para el campo de velocidades como para el campo de vorticidades.

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (4.100)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_{tr} + \frac{1}{2} \bar{\xi} \times \mathbf{r} \quad (4.101)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{tr} + \frac{1}{2} \xi' \times \mathbf{r} \quad (4.102)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}_{tr} + \frac{1}{2} \bar{\xi} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}'_{tr} + \frac{1}{2} \xi' \times \mathbf{r} \quad (4.103)$$

Aplicando esta descomposición y la de $S = \bar{S} + S'$ a la ecuación 4.98:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \bar{S})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S')}{\partial t} = & -\overline{\text{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}_{tr} \bar{S})} - \overline{\text{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}_{tr} S')} - \overline{\text{div}(\rho \mathbf{v}'_{tr} \bar{S})} - \overline{\text{div}(\rho \mathbf{v}'_{tr} S')} - \\ & - \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\rho (\bar{\xi} \times \mathbf{r}) \bar{S})} - \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\rho (\bar{\xi} \times \mathbf{r}) S')} - \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\rho (\xi' \times \mathbf{r}) \bar{S})} - \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\rho (\xi' \times \mathbf{r}) S')} \end{aligned} \quad (4.104)$$

de donde:

$$\frac{\partial(\rho \bar{S})}{\partial t} = -\overline{\text{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}_{tr} \bar{S})} - \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\rho (\bar{\xi} \times \mathbf{r}) \bar{S})} - \overline{\text{div}(\rho \mathbf{v}'_{tr} \bar{S})} - \frac{1}{2} \overline{\text{div}(\rho (\xi' \times \mathbf{r}) \bar{S})} \quad (4.105)$$

Obviamente los sumandos primero y segundo y tercero y cuarto del segundo miembro podrían sustituirse por el operador de divergencia aplicado a los valores medios y perturbados del producto de la velocidad \mathbf{v} y la magnitud másica S respectivamente.

Por otra parte, como:

$$\frac{\partial(\rho \bar{S})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v}) \text{ o } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) \text{ y } \quad (4.107)$$

$$\bar{S} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\overline{\text{div}(\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{S})} + \rho \bar{\mathbf{v}} \bar{S} \quad (4.108)$$

sustituyendo en la ecuación 4.105 y operando:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = -\bar{\mathbf{v}}_r \cdot \nabla \bar{S} - \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \bar{S} - \frac{1}{\rho} \text{div} \left[\rho \left(\overline{\mathbf{v}'_r S'} + \frac{1}{2} \overline{(\boldsymbol{\xi}' \times \mathbf{r}) S'} \right) \right] \quad (4.109)$$

Ecuación de Difusión para Régimen Turbulento con Vorticidad

Como es lógico y era de esperar, obtenemos, como variante de la ecuación de difusión, ésta en la que los efectos de advección contienen no sólo la traslación sino también la rotación. Existiendo, pues, la posibilidad de que la propia rotación sea capaz de arrastrar cualquier magnitud S al interior o exterior de los volúmenes de control a través de sus fronteras, debido a que en dichos volúmenes pueden existir eddies turbulentos que se encuentren en las cercanías de las mismas, por lo que podrían verse afectadas a causa del tamaño o dinámica rotacional de los eddies.

Por otra parte los efectos de contracción y dilatación del volumen de control a través del operador divergencia también contienen el efecto que la propia rotación induciría como contracción y dilatación de los propios vórtices.

IV.7 DESARROLLOS TEÓRICOS DE VÓRTICES.

PRIMERA APROXIMACIÓN

Como resultado del movimiento rotacional de los eddies turbulentos estas estructuras sufren modificaciones a lo largo del tiempo. Informarían o contemplarían variaciones en el volumen, en la forma, en la estructura másica y en la dinámica de rotación.

En el supuesto de ausencia de fuerzas exteriores aplicadas, además de la conservación de la energía y de la masa, podemos utilizar la conservación del momento cinético para las rotaciones en los eddies. El uso de esta propiedad nos va a permitir obtener una serie de interesantes consecuencias que presentamos en este epígrafe y así, admitiendo simplificada y en primera aproximación que las estructuras eddies son esféricas y se mantienen como tales en su evolución, podemos establecer un sistema de evolución como sigue.

Supongamos que la figura 4.2 corresponde al aspecto que en dos momentos diferentes presentaría un eddy que no tuviese desplazamiento y sólo rotase con una velocidad ω que, manteniendo la hipótesis de giro solidario, verificaría:

$$\omega = \frac{\xi}{2} \quad (4.110)$$

donde, como de costumbre, ξ es el vector rotacional de la velocidad.

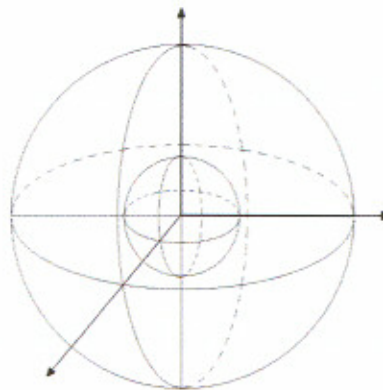


Fig. 4.2- Muestra gráfica de la superposición de imágenes de un eddy esférico en dos instantes diferentes.

Las características de cada uno de los eddies mostrados en la figura 4.2 son las siguientes:

- Esfera pequeña. Eddy pequeño:
 - $r, m, \rho, v_{dilat}=v_d, vol=V, v_{giro}=\omega \times r$ y ω velocidad angular
- Esfera grande. Eddy grande:
 - $r_1, m_1, \rho_1, v_{dilat}=v_{d1}, vol=V_1, v_{giro}=\omega_1 \times r$ y ω_1 velocidad angular

Vamos a buscar las relaciones, entre estas características, en el transcurso del tiempo, con lo cual tendremos una información de la evolución temporal de los eddies, dentro de la cual se encuentra la contracción y dilatación de los mismos.

Partiendo de la conservación del momento angular

$$L = cte = I\omega = I_1\omega_1 \quad (4.111)$$

siendo I e I_1 los momentos de inercia en ambos instantes.

Sustituyendo valores, operando y suponiendo que el instante 1 difiere muy poco del inicial, $r_1 = r + dr$ y $\omega_1 = \omega + d\omega$:

$$\frac{2}{5}mr^2\omega = \frac{2}{5}mr_1^2\omega_1 = \frac{2}{5}m(r+dr)^2(\omega+d\omega) \quad (4.112)$$

desarrollando y simplificando:

$$0 = \omega(dr)^2 + 2\omega r dr + r^2 d\omega + 2r dr d\omega + (dr)^2 d\omega \quad (4.113)$$

reordenando:

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(r^2 + 2rdr + (dr)^2) + dr(2\omega r + \omega dr) = \\ &= d\omega(r+dr)^2 + dr(2\omega r + \omega dr) \end{aligned} \quad (4.114)$$

de donde:

$$\boxed{d\omega = -\frac{2\omega r + \omega dr}{(r + dr)^2} dr} \quad (4.115)$$

Esta expresión nos informa de la evolución simultánea de la velocidad angular y del tamaño de los eddies. De ella vamos a extraer dos expresiones extremas para transcurros temporales cortos y largos.

En el caso de tiempos cortos ($t \ll$) los incrementos de tamaño serán pequeños y despreciables frente a r por lo que la expresión anterior, de segundo orden, puede ser modificada hasta llegar a otra de primer orden, ya que podemos reescribirla como:

$$d\omega = -\frac{2\omega r}{r^2} dr = -\frac{2\omega}{r} dr \quad (4.116)$$

Si integramos obtendremos la ley de variación de la velocidad angular en función del tamaño en los instantes iniciales de los eddies. Así pues:

$$\rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -2 \frac{dr}{r} \quad (4.117)$$

$$\boxed{\omega = \frac{k}{r^2}} \quad (4.118)$$

con lo que la velocidad lineal de giro quedaría:

$$\boxed{v_g = \frac{k}{r}} \quad (4.119)$$

que muestra un decrecimiento lineal de la velocidad, tanto angular como lineal, con la expansión de los eddies.

Estas expresiones conducen, como es lógico, a la ley de conservación de las áreas, ya que, por ejemplo, el área barrida en una unidad de tiempo (salvo el factor $\frac{1}{2}$) sería:

$$A = \mathbf{v}_g \times \mathbf{r} = k = |\mathbf{v}_g| |\mathbf{r}| \sin 90 = v_g r \quad (4.120)$$

y como $\mathbf{v}_g = \frac{k}{\mathbf{r}}$, A es constante.

Estas son áreas planas descritas por los vectores \mathbf{v} y \mathbf{r} , sin embargo, según \mathbf{r} describe un triángulo plano a través de la velocidad, simultáneamente el eddy gira describiendo triángulos esféricos cuya base es el eje instantáneo de giro en cada momento.

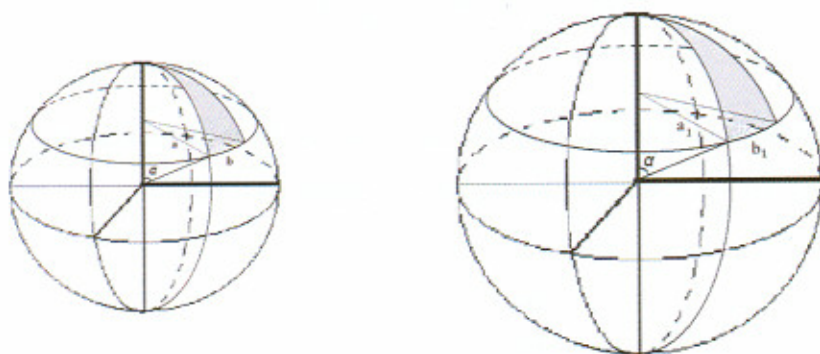


Fig. 4.3- Muestra gráfica de las áreas esféricas descritas por los eddies en sus rotaciones instantáneas. (las escalas de dibujo no son significativas). α ángulo que determina la posición del paralelo para la construcción de los triángulos esféricos.

Llamando a y a_1 a los radios del paralelo que definen los arcos base de los triángulos esféricos podemos llamar a la longitud de dichos arcos b para el tamaño menor y b_1 para el mayor. Siendo L y L_1 las longitudes de los arcos meridianos que sirven como los otros dos lados de los triángulos esféricos, se verifica que:

$$L = \frac{2\pi r}{m} \rightarrow A_{esf} = \left(\frac{2\pi r}{m} b \right) \frac{1}{2} \quad (4.121)$$

siendo m la fracción angular de 360 grados para el arco esférico meridiano definido. Asimismo:

$$L_1 = \frac{2\pi r_1}{m} \rightarrow A'_{esf} = \left(\frac{2\pi r_1}{m} b_1 \right) \frac{1}{2} \quad (4.122)$$

teniendo en cuenta la ley de las áreas $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{b}_1}{2} \rightarrow ab = a_1 b_1, \forall a, b$ y que

$$\text{sen} \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a_1}{r_1} :$$

$$A_{esf} = \left(\frac{2\pi r}{m} b \right) \frac{1}{2} = \left(\frac{2\pi r_1}{m} b_1 \right) \frac{1}{2} = A'_{esf} \quad (4.123)$$

válida para triángulos esféricos cuya base esté en el ecuador y vértice en el polo, aunque en general también podemos escribir, para cualquier paralelo:

$$A_{esf} = \left(\frac{2\pi a}{m \text{sen} \alpha} b \right) \frac{1}{2} = \left(\frac{2\pi a_1}{m \text{sen} \alpha} b_1 \right) \frac{1}{2} = A'_{esf} \quad (4.124)$$

es decir: la ley de las áreas es aplicable no sólo a los triángulos planos de los planos paralelos de los eddies, sino también a los triángulos esféricos de cualquier sección meridiana de ellos.

Estos cálculos ponen de manifiesto la no realidad de las escalas de las gráficas antes mencionadas.

Vamos a evaluar ahora, por otro lado, el nivel de variación de los volúmenes esféricos utilizando para ello las mismas figuras que caracterizan un triedro esférico tal como el de la figura siguiente:

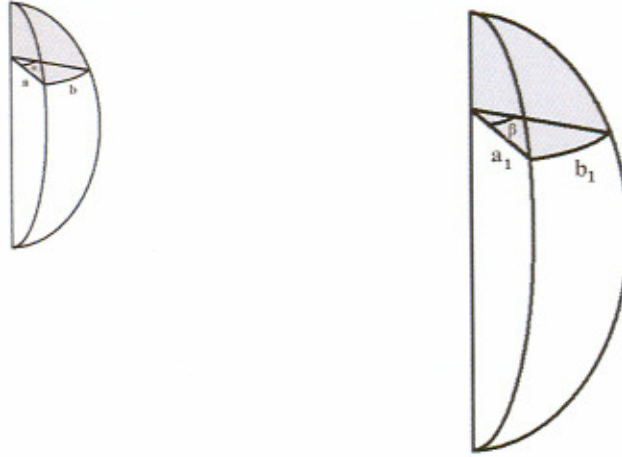


Fig. 4.4- Muestra gráfica de los volúmenes de triedros esféricos descritos por los eddies en sus rotaciones instantáneas (las escalas de los dibujos no son representativas).

Establecemos que cada volumen sombreado es una fracción (p) del volumen total del gajo esférico de la figura. Los volúmenes totales de los gajos de las figuras son:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\alpha}{2\pi} \quad (4.125)$$

en el caso del primer eddy; al paso del tiempo:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3 \frac{\beta}{2\pi} \quad (4.126)$$

Las porciones correspondientes al sombreado serían V/p y V_1/p . La relación entre ambos volúmenes nos proporcionará la ley de crecimiento en función de los tamaños:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\alpha r^3}{\beta r_1^3} \quad (4.127)$$

En los arcos b y b_1 se obtiene trivialmente que:

$$b = \alpha a \quad (4.128)$$

$$b_1 = \beta a_1 \quad (4.129)$$

Operando junto con la ley de las áreas, se llega definitivamente a que:

$$\boxed{V = \left(\frac{r}{r_1}\right) V_1 \rightarrow \frac{V}{r} = cte} \quad (4.130)$$

Esta expresión muestra el crecimiento lineal del volumen en función del tamaño del eddy además de expresar la constancia de la relación entre el volumen y el radio para cada eddy, en sus diferentes estadios. Es decir, cuanto mayor sea el eddy más lentamente crece su volumen.

Estas variaciones volumétricas de los eddies bajo la hipótesis de mantenimiento de la forma esférica imponen un comportamiento determinado a la densidad de los mismos. Si la masa constituyente de los eddies es constante para cada tamaño caracterizado por el radio r , y utilizando de nuevo la constancia del momento angular, recordemos que

$$\frac{\omega_l}{\omega} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \quad (4.131)$$

y puesto que las densidades en los dos estadios de movimiento serían:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (4.132)$$

y

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} \quad (4.133)$$

podemos escribir que:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{V_1}{V} \quad (4.134)$$

o lo que es lo mismo:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\ \rho_1 &= \frac{M}{V_1} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} \end{aligned} \right\} m = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 = \frac{4}{3}\pi \rho_1 r_1^3 \quad (4.135)$$

Para tiempos cortos, según estamos considerando:

$$\Delta t \ll \left\{ \begin{aligned} \rho_1 &= \rho + d\rho \\ r_1 &= r + dr \rightarrow \frac{4}{3}\pi \rho r^3 = \frac{4}{3}\pi (\rho + d\rho)(r + dr)^3 \\ \omega_1 &= \omega + d\omega \end{aligned} \right. \quad (4.136)$$

operando convenientemente obtenemos:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{(\omega + d\omega)r - (r + dr)\omega}{\omega(r + dr)} = \frac{rd\omega - \omega dr}{\omega(r + dr)} \quad (4.137)$$

Expresión que nos permite evaluar el ritmo de variación de densidad en función de los ritmos de variación del tamaño de los eddies y de la vorticidad, con lo que:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{r \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) - \omega \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)}{\omega(r + dr)}} \quad (4.138)$$

Esta forma variacional admite una sencilla simplificación, despreciando dr frente a r . Se transforma fácilmente en:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = \frac{\partial \ln \left(\frac{\omega}{r} \right)}{\partial t} \quad (4.139)$$

Integrando llegamos a:

$$\rho = k \frac{\omega}{r} \quad (4.140)$$

Es decir, para tiempos cortos si la vorticidad crece la densidad aumentaría salvo que el tamaño crezca más deprisa y no compense al de la vorticidad; o, por el contrario, si la vorticidad decrece la densidad ha de decrecer salvo que la disminución de tamaño del eddy compense la de la vorticidad.

Así pues, desde este punto de vista es posible indistintamente el crecimiento o decrecimiento de los tamaños de los eddies turbulentos.

Pasemos ahora a analizar el comportamiento de los eddies y más concretamente de la densidad de los mismos transcurridos tiempos largos. En este rango de tiempos no se pueden utilizar las aproximaciones anteriores, sino que se debe trabajar en la línea de incrementos finitos. De esta forma:

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho &= \Delta \rho \\ r_1 - r &= \Delta r \\ \omega_1 - \omega &= \Delta \omega \end{aligned} \quad (4.141)$$

siendo

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho \left(\frac{r}{r_1} \right)^3 \\ \omega_1 &= \omega \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.142)$$

por lo que:

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{r}{r_1} \frac{\omega_1}{\omega} \rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{r\omega_1 - r_1\omega}{r_1\omega} = \frac{r\omega_1 - r_1\omega + r_1\omega_1 - r_1\omega_1 + r\omega - r\omega}{r_1\omega} \quad (4.143)$$

agrupando:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{(r_1 + r)\Delta\omega - \Delta(r\omega)}{r_1\omega} \quad (4.144)$$

o de otra forma:

$$\Delta \rho = \rho \frac{(r_1 + r)}{r_1\omega} \Delta\omega - \frac{\rho}{r_1\omega} \Delta(r\omega) \quad (4.145)$$

Esta expresión puede interpretarse como un diagnóstico de las variaciones de densidad de los eddies ante diferentes posiciones ocupadas por los mismos y con diferentes rotaciones.

Si ahora dividimos por Δt y suponemos $\frac{\Delta \rho}{\Delta t} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t}$ podemos obtener de la ecuación anterior su versión en formato pronóstico.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\ln \rho)}{\partial t} = \frac{(r_1 + r)}{r_1\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \left(\frac{1}{r_1\omega} \right) \frac{\partial(r\omega)}{\partial t} \quad (4.146)$$

Si en esta última ecuación hiciéramos Δt muy pequeño, con lo que $\Delta t \ll \rightarrow r_1 \sim r$

$$\frac{\partial(\ln \rho)}{\partial t} \approx \frac{\partial \ln\left(\frac{\omega}{r}\right)}{\partial t} \quad (4.147)$$

que es la expresión obtenida anteriormente para tiempos cortos

Otra vía sencilla para obtener la expresión de tiempos largos recordando la conservación del momento angular y la expresión analítica de la densidad de un eddy llegaríamos a:

$$\left. \begin{aligned} \rho = \frac{M}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \rightarrow (m = cte) \rho = \frac{k}{r^3} \\ \omega r^2 = k' \rightarrow \omega = \frac{k'}{r^2} \end{aligned} \right\} \rho = k'' \frac{\omega}{r} \quad (4.148)$$

para todo tiempo y tamaño.

Reseñamos, por último, que en las expresiones obtenidas para la difusión de masa en forma de densidad, o lo que es lo mismo, con masa constante y volumen variable, la unidad de volumen utilizada ha sido la esfera. Los eddies pueden ser aproximaciones en un primer orden y en las cercanías de $t \sim 0$ a estas figuras, pero posteriormente deformarse en raras y variadas formas. Una posible explicación reside en la posibilidad caótica de que los eddies embebidos en este eddy-esfera crezcan en algún momento con vorticidades diferentes, por lo que se deformarían en esas tan variadas formas (Fig. 4.5). Pero el problema podría resolverse estudiando la difusión en función de volúmenes resultado de la suma de diferentes esferas en tamaño y ubicación, de igual forma que si de una esfera única se tratase, o bien estudiar cada esfera por separado:

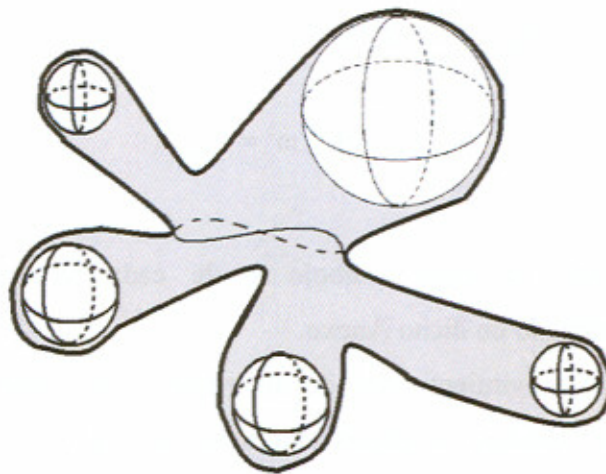


Fig. 4.5- Muestra gráfica de la evolución sufrida por un eddy (sombreado gris) hipotéticamente compuesto por diferentes eddies más pequeños de tipo esférico.

Dejamos esta línea de comentarios abierta para futuros trabajos continuación del llevado a cabo en esta memoria.

IV.8 BALANCES ENERGÉTICOS. APROXIMACIONES

En todos los desarrollos anteriores, en los que ha sido necesario, hemos supuesto que la rotación impuesta por el rotacional de la velocidad fuese solidaria. Dentro de las posibles influencias dinámicas que podríamos encontrar en el movimiento de un eddy de forma genérica nos encontraríamos con una traslación, una rotación y una posible deformación.

En el Anexo II hacemos un análisis energético detallado de los trabajos que un elemento de volumen realizaría si sólo se deformase o sólo rotase, tanto con elementos de volumen cartesianos como esféricos. El resumen de los resultados es el siguiente:

$$W_{DCL} = \frac{\mu V \tan^2 \alpha}{\Delta t} \quad (4.149)$$

$$W_{DCnL} = \frac{\mu u_0 V \tan \alpha}{d} \quad (4.150)$$

$$W_{DEL} = \frac{\mu V \tan^2 \alpha}{\Delta t} \quad (4.151)$$

$$W_{DEnL} = \frac{\mu u_0 V \tan \alpha}{2R} \quad (4.152)$$

$$E_{RCL} = \frac{1}{16} \rho V (a^2 + d^2) \omega^2 = E_{RCnL} \quad (4.153)$$

$$E_{REL} = \frac{1}{5} \rho V R^2 \omega^2 = E_{REnL} \quad (4.154)$$

El significado de cada símbolo y de cada término se encuentra convenientemente detallado en dicho Anexo.

Dado que el movimiento real de los eddies, independientemente de las traslaciones, puede ser solidario o carecer totalmente de ligadura entre las partículas que lo constituyen o desarrollarse dinámicamente entre estos dos extremos planteados, proponemos para el estudio de la vía preferentemente de desarrollo el siguiente número adimensional.

$$C = \frac{E_R - W_D}{E_R + W_D} \quad (4.155)$$

siendo de nuevo E_R la energía de rotación y W_D el trabajo desarrollado por la deformación.

Los diferentes valores numéricos gobernarán cuál ha sido preferentemente la dinámica de desarrollo del eddy y así:

$C = -1$	\rightarrow	no existe rotación
$C \in [-1, 0)$	\rightarrow	el efecto de deformación supera al de rotación
$C = 0$	\rightarrow	ambos efectos están equilibrados
$C \in (0, 1]$	\rightarrow	el efecto de rotación supera al de deformación
$C = 1$	\rightarrow	no existe deformación

Este número adimensional puede escribirse, lógicamente, de la siguiente manera:

$$C = \frac{\frac{1}{5}\rho VR^2\omega^2 - \frac{\mu u_0 V \tan \alpha}{2R}}{\frac{1}{5}\rho VR^2\omega^2 + \frac{\mu u_0 V \tan \alpha}{2R}} = \frac{2\rho R^3\omega^2 - 5\mu u_0 \tan \alpha}{2\rho R^3\omega^2 + 5\mu u_0 \tan \alpha} \quad (4.156)$$

para el caso de perfil de velocidades de traslación no lineal en coordenadas esféricas (Anexo II).

Teniendo en cuenta que cuando se genera una capa límite al paso de un fluido sobre un obstáculo, es la viscosidad la que gobierna realmente todo el fenómeno de capa límite y clasificando las diferentes subestructuras de manera que: en la zona más cercana al obstáculo la tensión fundamental es la viscosa, que según nos alejamos va dando paso a la estructura turbulenta totalmente desarrollada para perder su estructura en una zona relativamente alejada de la superficie de contacto entre el fluido y el obstáculo, podremos establecer una relación aproximada de los valores del número adimensional C para los distintos sustratos en que quedaría subdividida dicha capa límite, de manera que en la cercanía de la superficie de contacto en donde μ es fundamental $C = -1$, mientras que lejos, donde la viscosidad

carece de importancia frente a las tensiones turbulentas $C=1$. Es obvio que por encima de la región en la que $C=-1$ los efectos transicionales dependerían a la vez de la energía de rotación y del trabajo de deformación. La figura 4.6 aclara gráficamente los comentarios realizados:

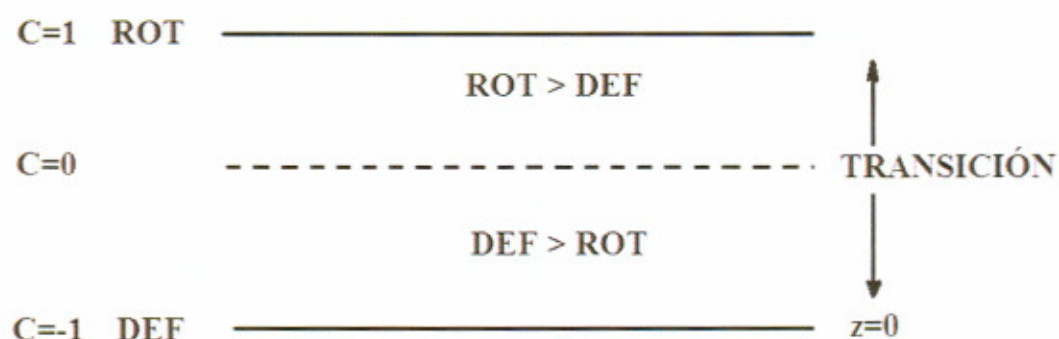


Fig. 4.6- Muestra gráfica de la estructura de los substratos en las cercanías de un obstáculo según los valores numéricos de C.

Aunque este número no tiene información sobre estratificaciones atmosféricas cabría una aplicación inicial a la Capa Límite Atmosférica sobre la que el análisis del número de Richardson concretaría con más precisión el resultado, pero mientras esta propuesta pueda realizarse en un trabajo futuro esquemáticamente cabe la posibilidad de mostrar la relación de C con la estructura C.L.A. La siguiente figura da cuenta de esta información:

ATMÓSFERA LIBRE	NO VISC NO TURB	
CAPA ESPIRAL	VIS > TURB VIS ↓	$C < 0$
TRANSICIÓN	VIS ≈ TURB	$C \sim 0$
CAPA SUPERFICIAL TURBULENCIA	VIS << TURB	$C > 0$
TRANSICIÓN	VIS ≈ TURB	$C \sim 0$
CAPA LAMINAR	VIS >> TURB	$C < 0$

Fig. 4.7- Aplicación de la valoración numérica de C a la Capa Límite Atmosférica.

Para finalizar este epígrafe presentamos una valoración numérica de los términos propuestos hasta ahora que nos permitirán tener en consideración la escala de energías con que estamos trabajando.

Tomando como valores típicos para el cálculo los valores de la Capa Límite Atmosférica y aceptando como radio de un eddy pequeño valores cercanos a $10^{-5} \text{ cm} = 10^{-7} \text{ m}$ y el de un eddy grande en torno a 100 m:

$$\begin{aligned}\rho &= 1'293 \text{ kg.m}^{-3} \\ u_0 &= 10 \text{ m.s}^{-1} \\ \eta &= 0'1 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1} = 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1} \\ \mu &= \rho \eta = 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

por lo que, para eddies pequeños (*ep*):

$$W_{DEnL,ep} = 2'7 \cdot 10^{-18} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2} \approx 3 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$W_{RE,ep} = 8'5 \cdot 10^{-30} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2} \approx 8'5 \cdot 10^{-30} \text{ J}$$

Conclusión: el trabajo de deformación es del orden de 10^{12} veces la energía de rotación, es decir, para eddies pequeños es mucho más sencilla la rotación que la deformación porque consume menor cantidad de energía. Así pues, un eddy pequeño empleará antes su energía en rotar que en deformarse.

En el caso de eddies grandes (*eg*):

$$W_{DEnL,eg} = 2'7 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2} \approx 3 \text{ J}$$

$$W_{RE,eg} = 0'6 \cdot 10^8 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2} \approx 0'6 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Conclusión: para los eddies grandes el efecto rotacional llevaría consigo un gran consumo energético, por lo que es más probable que los eddies grandes empleen su energía en deformarse antes que rotar¹.

¹ En el caso de poder realizar este cálculo con un eddy supuesto del tamaño de una borrasca, obtendríamos energías $W_{DEnL, eg} \approx 6 \cdot 10^{10} J$ y $W_{RE, eg} \approx 10^{26} J$; conclusión: una borrasca preferentemente no rota, gira deformando los elementos de volumen.

ANEXO I. ALGEBRA TENSORIAL

Para los vectores $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z)$ y $\bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_x, \bar{b}_y, \bar{b}_z)$ podemos escribir que:

$$\nabla \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x} & \frac{\partial \bar{a}_y}{\partial x} & \frac{\partial \bar{a}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial y} & \frac{\partial \bar{a}_y}{\partial y} & \frac{\partial \bar{a}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial z} & \frac{\partial \bar{a}_y}{\partial z} & \frac{\partial \bar{a}_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_x \\ \bar{b}_y \\ \bar{b}_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.I.1})$$

con las condiciones $\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x} = 0$ y $\bar{b}_y = \bar{b}_z = 0$, se obtendría:

$$\nabla \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}_x \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial y} \\ \bar{b}_x \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.I.2})$$

Además, siendo \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores, desde el algebra tensorial podemos escribir:

$$\nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (\text{A.I.3})$$

Las expresiones del texto se obtienen sin más que sustituir $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$.

ANEXO II. CÁLCULOS AUXILIARES

• PERFIL DE VELOCIDADES LINEAL

$$\bar{u} = az \quad (\text{A.II.1})$$

➤ FORMA CARTESIANA DEL EDDY

- Trabajo de Deformación (W_{DCL}):

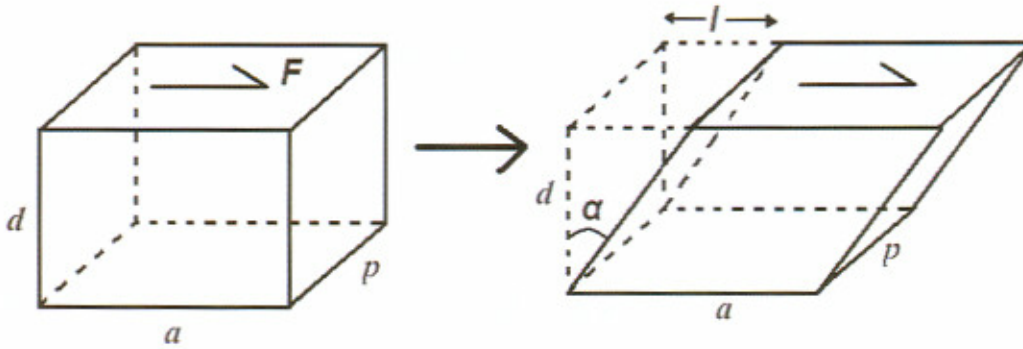


Fig. 4.8- Ejemplo de Deformación de un posible eddy considerado en coordenadas cartesianas.

$$W_{DCL} = \int F A dl = \int_0^l \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} a p dl = \mu \frac{\bar{u}_0}{d} a p l = \frac{\mu a p d \tan^2 \alpha}{\Delta t} \quad (\text{A.II.2})$$

haciendo:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta z} = \frac{\bar{u}_0}{d} = \frac{l}{d \Delta t} = \frac{\tan \alpha}{\Delta t} \quad (\text{A.II.3})$$

$$W_{DCL} = \frac{\mu V \tan^2 \alpha}{\Delta t} \quad (\text{A.II.4})$$

donde W_{DCL} es el trabajo de deformación cartesiano de un eddy suponiendo perfil de velocidad lineal, μ el coeficiente de viscosidad dinámico y el resto de los símbolos según la figura 4.8.

- Energía de Rotación (E_{RCL}):

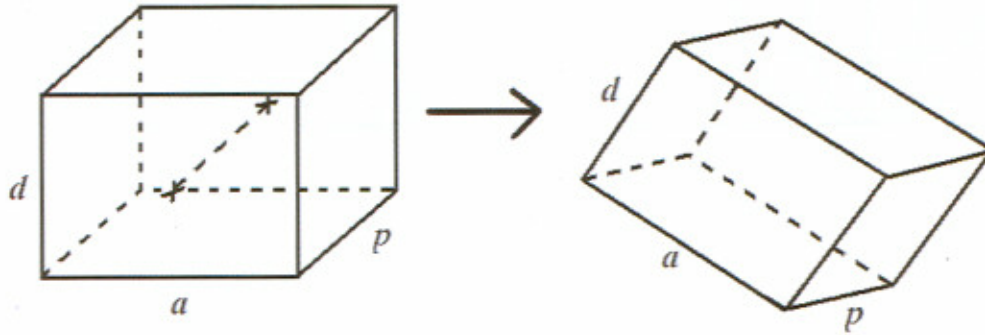


Fig. 4.9- Ejemplo de Rotación de un eddy en coordenadas cartesianas.

$$E_{RCL} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{A.II.5})$$

calculando:

$$I = \frac{1}{2} M \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} M (a^2 + d^2) \quad (\text{A.II.6})$$

$$E_{RCL} = \frac{1}{16} M (a^2 + d^2) \omega^2 \quad (\text{A.II.7})$$

donde E_{RCL} es la energía cartesiana de rotación, M la masa del eddy, ω la velocidad angular y el resto de los símbolos según figura 4.9.

➤ FORMA ESFÉRICA DEL EDDY

- Trabajo de Deformación (W_{DEL}):

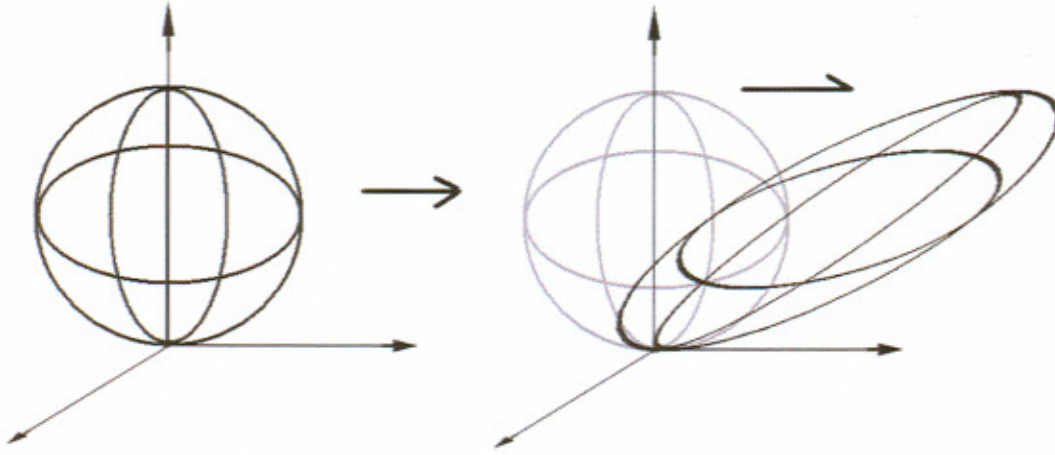


Fig. 4.10- Ejemplo de Deformación de un eddy considerado en coordenadas esféricas.

$$W_{DEL} = \int F A dl = \int_0^l \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \pi r^2 dl = \mu \pi \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \int_0^{2R} (2zR - z^2) \tan \alpha dz \quad (\text{A.II.8})$$

haciendo:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \approx \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta z} = \frac{2R \tan \alpha}{2R \Delta t} = \frac{\tan \alpha}{\Delta t} \quad (\text{A.II.9})$$

y

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{A.II.10})$$

con lo que:

$$W_{DEL} = \frac{\mu V \tan^2 \alpha}{\Delta t} \quad (\text{A.II.11})$$

siendo W_{DEL} el trabajo realizado por deformación de un vórtice esférico, V el volumen y el resto de símbolos según figura 4.10.

- Energía de Rotación (E_{REL}):

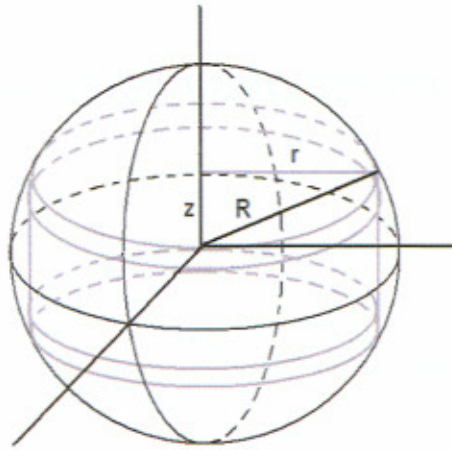


Fig. 4.11- Ejemplo de Rotación de un eddy considerado en coordenadas esféricas.

$$E_{REL} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{A.II.12})$$

calculando:

$$I = \int r^2 dm = \frac{2}{5} m R^2 \quad (\text{A.II.13})$$

siendo:

$$r^2 + z^2 = R^2$$

$$dr = -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} dz \quad (\text{A.II.14})$$

$$E_{REL} = \frac{1}{5} \rho V R^2 \omega^2 \quad (\text{A.II.15})$$

donde E_{REL} es la energía de rotación en esféricas, siendo ρ la densidad y el resto de parámetros según la figura 4.11.

• **PERFIL DE VELOCIDADES PARABÓLICO**



Fig. 4.12- Ejemplo de Perfil Parabólico utilizado.

$$\bar{u} = az^2 + bz + c \quad (\text{A.II.16})$$

siendo:

$$z=0 \rightarrow \bar{u} = 0 \quad (\text{A.II.17})$$

$$z=d \rightarrow \bar{u} = \bar{u}_0 \text{ y } \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.II.18})$$

$$\bar{u} = -\frac{\bar{u}_0}{d^2} z^2 + \frac{2\bar{u}_0}{d} z \quad (\text{A.II.19})$$

➤ FORMA CARTESIANA DEL EDDY

- Trabajo de Deformación (W_{DCnL}):

$$W_{DCnL} = \int FAdl = \int_0^l \mu \left(\frac{2\bar{u}_0}{d} - \frac{2\bar{u}_0}{d^2} z \right) apdl = \frac{\mu \bar{u}_0 V \tan \alpha}{d} \quad (\text{A.II.20})$$

$$\boxed{W_{DCnL} = \frac{\mu \bar{u}_0 V \tan \alpha}{d}} \quad (\text{A.II.21})$$

donde W_{DCnL} es el trabajo de deformación cartesiano de un eddy supuesto perfil de velocidad no lineal y el resto de los símbolos según W_{DCL} .

- Energía de Rotación (E_{RCnL}):

$$\boxed{E_{RCnL} = \frac{1}{16} M (a^2 + d^2) \omega^2} \quad (\text{A.II.22})$$

donde E_{RCnL} energía cartesiana de rotación no lineal, cálculos y resto de símbolos idénticos al caso y el resto de los símbolos según E_{RCL} .

➤ FORMA ESFÉRICA DEL EDDY

- Trabajo de Deformación (W_{DEnL}):

$$W_{DEnL} = \int FAdl = \int_0^{2R} \mu \left(\frac{2\bar{u}_0}{d} - \frac{2\bar{u}_0}{d^2} z \right) \pi r^2 dl = \mu \pi \bar{u}_0 \tan \alpha R^2 \left(\frac{2}{3} \right) \quad (\text{A.II.23})$$

haciendo:

$$r^2 = R^2 - (z - R)^2 = 2zR - z^2 \quad (\text{A.II.24})$$

y

$$dl = \tan \alpha dz \quad (\text{A.II.25})$$

con lo que:

$$W_{DEnL} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\mu u_0} V \tan \alpha}{R} \quad (\text{A.II.26})$$

siendo W_{DEnL} el trabajo realizado por deformación de un vórtice esférico y el resto de símbolos según W_{DEL} .

- Energía de Rotación (E_{REnL}):

$$E_{REnL} = \frac{1}{5} \rho V R^2 \omega^2 \quad (\text{A.II.27})$$

donde E_{REnL} es la energía de rotación en esféricas y el resto de los símbolos según E_{REL} .

CAPITULO V

COMPUTACIÓN DEL MODELO

V.1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, un desarrollo de estudio teórico como el propuesto en esta memoria, estaría incompleto si no se aplicara a problemas reales de experimentación o, en su defecto, a la simulación, gracias a la potencia de los computadores, de algún problema sobre aplicación inmediata.

Es sabido que los procesos de simulación, que son los que vamos a desarrollar en este capítulo, presentan un alto grado de dificultad ya que la cuantificación de las variables nos aleja de la idealización diferencial de las correspondientes ecuaciones y de las posibles soluciones generales del problema.

El primer tipo de dificultades, siendo absolutamente insoslayable, puede minimizarse mediante el uso de condiciones matemáticas que validen y estabilicen relativamente las soluciones del problema, aunque éstas sean particulares, y más concretamente numéricas.

La segunda dificultad no es resoluble como ya hemos comentado en otros párrafos de esta memoria, ya que aún en los casos más sencillos de simulación no es posible eliminar la influencia que en la resolución tendrían los términos no lineales. De manera que la obtención de soluciones generales es, hoy por hoy, una entelequia es decir: una imposibilidad real.

Es por eso y en auxilio de la existencia de estas dificultades, por lo que se utiliza con tanta frecuencia la sustitución de las expresiones generales y, diríamos más correctas, por otras aproximadas a través de los modelos físico-matemáticos y la parametrización de los mismos.

En ningún momento debemos ignorar ninguno de estos procedimientos y mucho menos minusvalorarlos. No debemos olvidar sin embargo que se introducen, con la modelización y parametrización, efectos, posiblemente no deseados, que conducirán a que algunos comportamientos deducidos sin ningún error de aplicación numérica no correspondan con la realidad.

No es infrecuente la confianza excesiva de los investigadores en los resultados de aplicación de modelos, incluso a cualquier escala atmosférica. Quizás esta frase resuma lo que estamos queriendo decir: *“los resultados de la resolución numérica mediante modelización y parametrización no son dogmas de fe”*.

Este capítulo se va a desarrollar presentando en forma computacional las ecuaciones seleccionadas de todas las que se han planteado en el capítulo anterior, mediante aplicaciones numéricas y con propuestas para el cálculo de las variables, intentando eludir las modelizaciones y parametrizaciones, sobre todo clásicas. Se ha utilizado para ello una malla o rejilla cartesiana que será descrita en el epígrafe apropiado.

Concretamente aplicaremos las ecuaciones al conocimiento, evolución y desarrollo de propuestas de vórtices situados en unos puntos determinados de los recintos de integración.

Para la resolución de estas ecuaciones seleccionadas se realizará en primer lugar una discretización apropiada que describiremos posteriormente y que cuantificará en forma discreta las variables con lo que, así como indicamos en párrafos anteriores, los resultados que se obtengan serán aproximaciones a la realidad y ya que se cumplirán las condiciones matemáticas para asegurar la estabilidad de las soluciones, no siendo fiables al cien por cien, representarán aproximadamente el comportamiento de los vórtices que responden a las ecuaciones utilizadas.

A continuación se evaluarán las variaciones temporales de campos de magnitudes, fundamentalmente velocidades, previa cuantificación de los términos que sean necesarios para la obtención de los resultados finales. Precisamente en esta cuantificación es donde se procurará eludir la modelización y parametrización mencionadas.

El sistema coordenado que se utiliza no permite establecer el vector velocidad media $(\bar{u}, 0, 0)$, dada la inviabilidad de su uso en todas y cada una de las partículas del fluido situadas en cada momento sobre todos y cada uno de los puntos de malla.

Todos los cálculos que se proponen pueden realizarse en un computador personal, lo cual facilita notablemente el uso de las propuestas de esta memoria, ya que evita la necesidad de la capacidad de acceso a modernos supercomputadores. Concretamente, para el caso de los cálculos realizados en esta memoria y para la resolución numérica de las ecuaciones discretizadas, se ha utilizado un PC Pentium IV, a 1'6 GHz, con 1 Gb de memoria RAM.

Sin embargo este modelo podría implantarse para su uso en escalas superiores como elementos necesarios de desarrollo y cuantificación, que necesitarían el uso de los supercomputadores.

Dentro del grupo de posibles lenguajes de programación, más concretamente de los más usuales en el mundo científico, se ha seleccionado para el desarrollo de los cálculos numéricos de esta memoria el FORTRAN 90. Este lenguaje de programación presenta características muy modernas y mucho más aptas para su aplicación a los computadores personales modernos que las versiones anteriores, tanto en sus capacidades para el cálculo como para la capacidad en la dimensionalización y el almacenamiento en memoria de las variables que corresponden a las aplicaciones numéricas, así como las cuantificaciones de las variables a utilizar y de las ecuaciones que rigen entre ellas.

De entre las aptitudes de este lenguaje no ha sido necesario utilizar, en esta programación, conceptos de alto nivel, como puedan ser las variables puntero, ya que es posible, en un cálculo tan delimitado como el nuestro, eludir el uso de estas técnicas. Por medio del uso de correctos diagramas de flujo, la única dificultad se encuentra en los bucles temporales y los grupos de condiciones que se han de programar (más aún si se han de usar ambos simultáneamente).

Además, es de destacar que este lenguaje está ampliamente incorporado a los cálculos de diferentes modelos operativos en todo el mundo, tanto en sus versiones principales, como en sus rutinas paralelas, tal es el caso del MM5, del HIRLAM, del modelo que utiliza el Centro Europeo de Predicción a Medio Plazo, entre otros.

Los resultados finales, normalmente en forma gráfica, así como las discusiones físicas a que hubiere lugar, se presentarán ya en el siguiente capítulo.

V.2 ECUACIONES

El desarrollo del problema se plantea en tres intervalos temporales claramente diferenciados, en los que el comportamiento conduce a la aplicación de diferentes ecuaciones.

En el primer intervalo (momento inicial), el problema plantea única y exclusivamente comportamientos iniciales de las variables del mismo así como cuantificaciones apropiadas. Evidentemente, asignamos valores iniciales única y exclusivamente a aquellas variables que son necesarias para comenzar a calcular los términos intermedios que nos permitan evaluar los pronósticos mediante la resolución de las ecuaciones temporales. Como es lógico, la intención de la investigación radica en que para cada momento de tiempo el sistema nos informe acerca de estas mismas variables “básicas”, a partir de las cuales obtener iteradamente información de los momentos sucesivos, de uno en uno.

Durante este primer intervalo y antes de su finalización, se pasa también a calcular todos y cada uno de los términos que aparecerán después en las ecuaciones del segundo intervalo temporal, con dependencia espacial, puesto que para entrar en ese intervalo es necesaria la aplicación de las nuevas ecuaciones y el cálculo de sus términos constituyentes.

Para llegar al intervalo temporal de pleno desarrollo del problema, durante el segundo intervalo temporal, se establece una condición de “alcance”, es decir, las perturbaciones turbulentas en cada una de las componentes de la velocidad, para todo punto de rejilla, no deben superar el 10 por ciento de las componentes promediadas de la misma. Por lo tanto, la duración de este segundo intervalo depende de esta condición, además de depender del estado inicial del problema.

Esta condición está extractada de la información bibliográfica, base para esta memoria, ya que normalmente se acepta que cuando las perturbaciones turbulentas alcanzan el valor en torno al diez por ciento de los flujos medios, es cuando se considera que la turbulencia está totalmente desarrollada. Para valores inferiores a este diez por ciento la turbulencia bien está surgiendo por inestabilización de los regímenes laminares, bien está en vías de desarrollo (transición) para alcanzar el estadio turbulento final. Y si la perturbación supera suficientemente dicho diez por ciento, establecido frecuentemente, se supone que

corresponde a oscilaciones añadidas al flujo medio como podrían ser las ondas de Rossby, ondas gravitacionales, etc., que no se caracterizan por ser turbulentas. Es evidente que la justificación de estos razonamientos que acabamos de exponer es meramente experimental.

Esta condición de implicación física y experimental se ha traducido, como una condición que da paso al tercer y último intervalo temporal, para la resolución numérica de las ecuaciones, de manera que siempre que aparezca por primera vez en un primer punto de la malla ese será el instante inicial para las sucesivas integraciones que propone la memoria.

Esquemáticamente:

$$\Delta t = \Delta_i t + \Delta_j t + \Delta_k t \quad (5.1)$$

- ❖ $\Delta_i t \rightarrow$ establecimiento de las condiciones iniciales del problema, $i=1$, que se describirán posteriormente y cálculo de los términos intermedios para comenzar a solucionar las ecuaciones dando paso al
- ❖ $\Delta_j t \rightarrow$ resolución de los sistemas de ecuaciones mientras que no se supere el criterio: $u', v', w' \leq \frac{\bar{u}}{10}, \frac{\bar{v}}{10}, \frac{\bar{w}}{10}$, $j=2, \dots, l$, siendo l el momento en el que se alcanza dicho criterio, para todos los puntos de la rejilla “válidos¹”. Recordando que el sistema coordenada establece $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ distinto de $(\bar{u}, 0, 0)$.
- ❖ $\Delta_k t \rightarrow$ pleno desarrollo del problema, con $k=l+1, \dots$ hasta el final de integración.

¹ La calificación de “válidos” se explicará detalladamente en el epígrafe V.

En $\Delta_i t$ se realiza la asignación de valores numéricos iniciales correspondientes al siguiente grupo de variables:

- $(u, v, w) = (u_0, v_0, w_0) = \left(u_0, u_0, \frac{u_0}{10} \right)$, para todo punto de rejilla.
- Fórmula barométrica para la presión:

$$P = 1000e^{-\frac{C_p}{R}z} \quad (5.2)$$

donde z se toma k veces el brazo de red (d , Figura 5.2), siendo k el número de orden de dicho brazo de red en z , equivalente a la altura considerada (Fig. 5.1).



Fig. 5.1- Esquema de la asignación de valores para los brazos de red en la coordenada z .

Por ahorro y sencillez de cálculo esta función exponencial se ajusta, en primera aproximación, con una aplicación afín de primer orden:

$$P = P_0 - Ak \quad (5.3)$$

- Temperatura potencial, θ , que en principio se supone constante. Lo cual equivale a la hipótesis de que las ecuaciones muestran movimientos cuyos desarrollos son termodinámicamente adiabáticos, al menos en el estadio inicial.

- Cálculo de $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{P}, \bar{\theta}$. Para lo cual se utiliza la condición física de que las medias temporales coincidan con las espaciales (condición de ergodicidad) y se evalúan promediando en los seis puntos de rejilla adyacentes más el propio punto de estudio, es decir media de 7 valores. Obviamente $\bar{\theta} = \theta$ dado que es constante.
- Las perturbaciones se evalúan restando los valores puntuales menos los valores medios en cada punto.
- A lo largo de este primer intervalo temporal deberán calcularse una serie de términos intermedios (como por ejemplo del tipo: $\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}}$), cuyos promedios se realizan, al igual que en el punto anterior, utilizando nuevamente la condición de ergodicidad.

Con los valores asignados y los cálculos previos realizados, durante este primer intervalo temporal, se inicia el proceso del $\Delta_j t$ en el que, mediante el uso de las ecuaciones:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u \frac{\Delta v}{\Delta y} + u \frac{\Delta w}{\Delta z} - v \frac{\Delta u}{\Delta y} - w \frac{\Delta u}{\Delta z} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta x} + \eta \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \quad (5.4)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + v \frac{\Delta w}{\Delta z} - u \frac{\Delta v}{\Delta x} - w \frac{\Delta v}{\Delta z} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta y} + \eta \frac{\Delta}{\Delta y} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} \right) \quad (5.5)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = w \frac{\Delta u}{\Delta x} + w \frac{\Delta v}{\Delta y} - u \frac{\Delta w}{\Delta x} - v \frac{\Delta w}{\Delta y} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} + \eta \frac{\Delta}{\Delta z} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) + g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \quad (5.6)$$

procedentes de las ecuaciones de Navier-Stokes junto con la ecuación de continuidad para fluido homogéneo ($\text{div} \mathbf{v} = 0$), se evalúan las variables puntuales de la velocidad para los sucesivos intervalos temporales. En estas expresiones, como es lógico, η es el coeficiente de viscosidad cinemática, g la gravedad y θ la temperatura potencial. El último sumando de la tercera ecuación representa, pues, el término de flotabilidad.

El término $-u \frac{\partial u}{\partial x}$, antes de convertirlo en incrementos finitos, ha sido sustituido a través de la divergencia por: $u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z}$ (ecuación en coordenada x). De igual manera, se trabaja en las ecuaciones de coordenadas y y z , en las que los sumandos $-v \frac{\partial v}{\partial y}$ y $-w \frac{\partial w}{\partial z}$ han sido sustituidos, de nuevo, por sus equivalencias a través de la divergencia de la velocidad.

- Se calculan las componentes de la velocidad instantánea convenientemente despejadas en ellas.

Con las ecuaciones:

$$\frac{\Delta \bar{u}}{\Delta t} = \bar{u} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta y} + \bar{u} \frac{\Delta \bar{w}}{\Delta z} - \bar{v} \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta y} - \bar{w} \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta z} + \overline{u' \frac{\Delta v'}{\Delta y}} + \overline{u' \frac{\Delta w'}{\Delta z}} - \overline{v' \frac{\Delta u'}{\Delta y}} - \overline{w' \frac{\Delta u'}{\Delta z}} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta x} \quad (5.7)$$

$$\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{v} \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta x} + \bar{v} \frac{\Delta \bar{w}}{\Delta z} - \bar{u} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta x} - \bar{w} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta z} + \overline{v' \frac{\Delta u'}{\Delta x}} + \overline{v' \frac{\Delta w'}{\Delta z}} - \overline{u' \frac{\Delta v'}{\Delta x}} - \overline{w' \frac{\Delta v'}{\Delta z}} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta y} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{w}}{\Delta t} = & \bar{w} \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta x} + \bar{w} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta y} - \bar{u} \frac{\Delta \bar{w}}{\Delta x} - \bar{v} \frac{\Delta \bar{w}}{\Delta y} + \\ & + \overline{w' \frac{\Delta u'}{\Delta x}} + \overline{w' \frac{\Delta v'}{\Delta y}} - \overline{u' \frac{\Delta w'}{\Delta x}} - \overline{v' \frac{\Delta w'}{\Delta y}} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} + g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

- Se calculan las componentes de la velocidad media.

Según se vio en el capítulo anterior, los efectos de vorticidad, tanto promedia como perturbada, se encuentran en las expresiones 4.37 que, para el tratamiento de discretización, se presentan en este formato, algo más sencillo de manejar para los cálculos numéricos y la correspondiente computación (lo que conlleva un ahorro de cálculo).

En la obtención de las ecuaciones 4.37 se pusieron de manifiesto, además, los sumandos que contienen los efectos físicos de los vórtices que en este formato actual quedan implícitos dentro de las derivadas de cada componente respecto de las

coordenadas de las otras componentes, tanto en valores puntuales como en valores medios de la velocidad.

Mostraremos, más adelante y con estudios de casos concretos, los desarrollos y evoluciones de los vórtices que llevan consigo las componentes de la velocidad obtenidas con los cálculos numéricos aplicados el sistema anterior.

- Para calcular los valores de la temperatura potencial puntual y media:

Con las ecuaciones 5.10 y 5.11 se construye el sistema discreto para la evaluación de la difusión de calor a partir de la temperatura potencial en cada momento, y de la temperatura potencial promedia temporal:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta x}(u\theta) + \frac{\Delta}{\Delta y}(v\theta) + \frac{\Delta}{\Delta z}(w\theta) \quad (5.10)$$

$$\frac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta t} = \bar{u}\frac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta x} + \bar{v}\frac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta y} + \bar{w}\frac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta z} - \frac{\Delta}{\Delta x}(\overline{u'\theta'}) - \frac{\Delta}{\Delta y}(\overline{v'\theta'}) - \frac{\Delta}{\Delta z}(\overline{w'\theta'}) \quad (5.11)$$

Para la construcción de la temperatura potencial promedia se ha utilizado el mismo dispositivo que para la velocidad media, es decir, en el primer momento de integración se aplicaba la condición de ergodicidad y a partir de entonces los promedios se obtienen mediante la última expresión.

Al igual que en el sistema de ecuaciones, los efectos mostrados en la ecuación 5.11 sobre la fracción de difusión de calor, o de otra magnitud cualquiera, que corresponden a los vórtices en valor promedio y perturbado, quedan implícitos en los términos de velocidades medias y perturbadas.

- Cálculo de la presión. Respecto de ella se proponen dos opciones:

- No variar la presión con el tiempo.

- $$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\mu R}{C_v} \left(u \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + v \frac{\Delta}{\Delta y} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} \right) + w \frac{\Delta}{\Delta z} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right) - u \frac{\Delta P}{\Delta x} - v \frac{\Delta P}{\Delta y} - w \frac{\Delta P}{\Delta z}$$

(ver ANEXO III).

- La componente media de la presión se ha identificado en cada momento con la de la presión instantánea propiamente dicha, ya que establecemos la hipótesis de que $P' = 0$.
- De nuevo se realizan cálculos de términos intermedios, al igual que en el $\Delta_j t$ presentes en las ecuaciones manejadas, como por ejemplo, otra vez, el término: $\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}}$.
- El procedimiento se itera un número suficiente de veces (al menos 10 pasos) hasta que deja de cumplirse $u', v', w' \leq \frac{\bar{u}}{10}, \frac{\bar{v}}{10}, \frac{\bar{w}}{10}$. Este sería el último paso de tiempo en utilizar esta técnica ($\Delta_j t$) y en el que comenzamos a utilizar las técnicas de $\Delta_k t$.

Una vez alcanzado el criterio de “alcance”, el modelo está preparado para su uso según la técnica final que manejamos en esta memoria. Para ello, en $\Delta_k t$ se altera el sistema de cálculo de los términos descritos con lo que se establece el siguiente y definitivo:

- Los valores medios de las componentes de la velocidad $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\theta}$, así como todos los términos intermedios de todas las ecuaciones del tipo $\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}}$ y $\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v' \theta'})$, pasan a ser calculados como promedios temporales (no así los de la forma $\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$), siempre con diez casos de las velocidades instantáneas, incluido el del momento de estudio más los nueve que preceden a cada instante (durante los nueve primeros casos de integración en este intervalo temporal se usarán los que fueren necesarios de los evaluados en $\Delta_j t$).
- Para el cálculo de los valores instantáneos de las componentes de la velocidad (u, v, w) nos encontramos con la dificultad de carecer de una ecuación que gobierne los movimientos en régimen turbulento sin ninguna hipótesis, comparable, por ejemplo, a la de Navier-Stokes para los fluidos viscosos, ya

que lo más parecido es la ecuación en régimen turbulento con la descomposición de Reynolds ($\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$). Proponemos utilizar esta última como lo menos alejado al comportamiento que queremos caracterizar y aceptar que los campos de velocidad $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, obtenidos a través de las ecuaciones, se identifiquen con (u, v, w) . Por tanto, las ecuaciones a utilizar, en incrementos finitos son las 5.7 a 5.9.

- El resto de magnitudes: P y \bar{P} son calculadas según la metodología correspondiente al intervalo de tiempo anterior $\Delta_j t$.

V.3 CONDICIONES INICIALES

Como es lógico, para la integración en cualquiera de los casos definidos en el epígrafe anterior, es necesario el establecimiento de condiciones iniciales que, en el modelo propuesto que nos ocupa, serán las siguientes.

En $t=1$ (momento inicial) tomamos como valores asociados, para todos los puntos de rejilla, a las variables del problema:

$$u=u_0=(5 \text{ unidades normalmente}),$$

$$v=u_0,$$

$$w=u_0/10,$$

$$P = P_0 = 998'24,$$

$$\theta = 300.$$

La expresión genérica de la presión ha sido:
 $P = P_0 - Ak = 998'24 - 1'4884k$, obtenida como ajuste lineal a la fórmula barométrica exponencial, con un coeficiente de correlación superior al 0'98, aunque en el caso más elemental se ha tomado como constante únicamente.

Además, las condiciones iniciales para caracterizar y definir los vórtices serán establecidas en cada caso de estudio.

V.4 REJILLA Y SISTEMA DE DISCRETIZACIÓN

Para los procedimientos de discretización en esta memoria se han elegido, en primera intención y por sencillez de cálculo, sistemas de rejilla cartesiana constante en el tiempo y equidistante en el espacio. De manera que la rejilla es tridimensional y los puntos se hallan separados por intervalos espaciales en cuyos extremos es donde se definen y calculan las variables establecidas en el epígrafe anterior.

Una muestra gráfica de esta rejilla podría ser la figura 5.2:

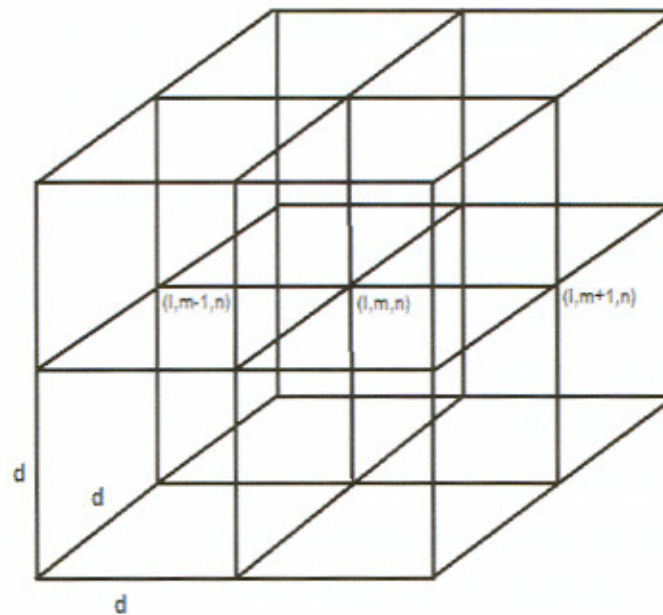


Fig. 5.2- Esquema de las celdillas constituyentes en la rejilla utilizada para la integración numérica.

Dada la sencillez de la propuesta de rejilla se ha decidido evaluar y calcular todas y cada una de las variables en todos y cada uno de los puntos de la misma, confiando en que la precisión sea mayor (incluso obteniendo mejores visualizaciones de los vórtices), a diferencia de otras propuestas comentadas en esta memoria en las que se seleccionan algunos puntos privilegiados para definir variables o para calcularlas, por ejemplo, la rejilla C de Arakawa.

Se asigna a cada intervalo de rejilla (paso) una longitud fija de $4u$, siendo u una unidad de longitud. Normalmente y con idea de manejar el sistema internacional en el desarrollo numérico se puede tomar la unidad $u=1\text{m}$ (seleccionado en función de la escala del problema). Evidentemente en otros estudios y sobre todo de diferentes escalas, la unidad podría ser otra expresable en fracciones o en múltiplos de metro.

El número de celdillas, que constituyen las diferentes rejillas utilizadas, es variable dependiendo de la capacidad del ordenador utilizado en los cálculos y del nivel de error admisible que las condiciones de contorno y más concretamente las procedentes de la presión, vayan introduciendo paso a paso hacia el interior de la rejilla, en el centro de la cual normalmente se ubican los valores numéricos del campo de velocidades que condicionan la existencia de un vórtice. En párrafos posteriores se irá detallando más este proceso y conseguiremos presentarlo de forma más inteligible.

El número de puntos de rejilla utilizados, en las diferentes propuestas de experimentación numérica, para cada eje son:

- EJE X: 58, 60, 65, 76 y 82
- EJE Y: 58, 60, 65, 76 y 82
- EJE Z: 82, 110, 120, 130 y 174

En el transcurso temporal de la investigación se ha conseguido ir aumentando el número de intervalos de tiempo de integración tras la consecución de las condiciones de estabilidad en las rejillas de menor número de puntos y consecuentemente en todas las demás.

El transcurso de los pasos temporales de integración modifica el sistema de rejilla según se explicará con más detalle en el epígrafe siguiente.

Para llevar a cabo la integración, una vez definidas en todos y cada uno de los puntos de la malla las diferentes variables del problema, la discretización se ha efectuado utilizando, por sencillez, el esquema de diferencias finitas centradas para los cálculos espaciales y de diferencias finitas adelantadas para los cálculos temporales.

De manera que, por ejemplo, según la figura 5.2:

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta y} \right)_{l,m,n} = \frac{u(l, m+1, n) - u(l, m-1, n)}{2d} \quad (5.12)$$

de igual manera, por ejemplo:

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta t} \right)_{l,m,n} = \frac{u_{l,m,n,t+1} - u_{l,m,n,t}}{\tau} \quad (5.13)$$

siendo d el tamaño del brazo de rejilla y τ el intervalo temporal de avance de cada paso.

Para el cálculo de las derivadas segundas necesarias se aplica la misma técnica espacial, con lo que, por ejemplo:

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta y} \frac{\Delta u}{\Delta y} \right)_{l,m,n} = \frac{u(l, m+2, n) + u(l, m-2, n) - 2u(l, m, n)}{(2d)^2} \quad (5.14)$$

Como es lógico, al efectuar el cálculo de las derivadas primeras, se pierde la información de las mismas en los puntos de malla más exteriores (corona exterior de 1 punto de grosor), a la vez que para efectuar el cálculo de las derivadas segundas se pierde la información de un punto más de lo que hemos llamado corona exterior (corona de otro punto de grosor). En el próximo epígrafe se explicará como tratar la pérdida de, al menos dos coronas exteriores, por cada paso de integración.

V.5 CONDICIONES DE CONTORNO

En este tipo de modelos es necesario garantizar una serie de condiciones seguras en el entorno de la zona de los vórtices, con el objetivo de que la interacción entre ellos y el fluido que lo rodea no se vea influenciada por los posibles errores que introduzcan las fronteras exteriores de la malla de integración.

Definimos una corona exterior como aquella zona de puntos de malla que se ven afectados espacialmente por el cálculo numérico de incrementos. De tal forma, x_1 y x_n son los puntos de rejilla en la coordenada x en los que no es posible definir sus incrementos centrados de primer grado con el modelo utilizado (aunque existe la posibilidad de alterar el cálculo de incrementos finitos centrados a laterales desplazados, pero no se ha utilizado). Análogamente se definen las coronas en las coordenadas y y z .

De igual manera, para incrementos de segundo grado se deben restringir estos cálculos en los puntos x_1 , x_2 y x_{n-1} , x_n . Así pues, esto es lo que definiríamos como segunda corona. Ídem para las otras coordenadas.

A causa de que, durante los intervalos temporales primero y segundo, se realiza un cálculo promedio de alguna variable mediante promedios espaciales, cada vez que lo hagamos con alguna magnitud perderemos una corona más debido a que no todos los puntos que rodean al de cálculo tienen definidas ni calculadas las variables necesarias para obtenerlos. Por lo que la tercera corona: x_1 , x_2 , x_3 y x_{n-2} , x_{n-1} , x_n , ha de perderse también cuando se evalúen promedios de los términos tipo

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x}$$

En resumen, por cada paso temporal de integración estos efectos harían perder la información de las tres coronas exteriores de la malla para el recinto de integración. Este hecho es absolutamente insostenible con el paso del tiempo, por lo que es necesaria alguna herramienta auxiliar que evite esta pérdida masificada de información.

A causa de la homogeneidad horizontal y la variación temporal admitida para ciertas variables en la coordenada vertical, presentaremos la herramienta auxiliar, primero aplicada a los planos XY y después a la coordenada Z.

Más detalladamente, al tener el fluido en plano horizontales y en ausencia de vórtices un comportamiento homogéneo para cada variable, es factible suponer la aplicación de una extensión de estos valores homogéneos a los puntos de rejilla dudosos (perdidos) sin perjuicio de la capacidad de la malla para la integración.

Por tanto, el procedimiento propuesto y seguido en la memoria ha sido el siguiente (Fig. 5.3): tomar información de puntos interiores y asignarla a los puntos de estas coronas inciertas. Esto equivaldría virtualmente a añadir tantas coronas exteriores a la malla como virtualmente perdidas, lo que repondría la información necesaria para el siguiente paso de tiempo. Esto se ha conseguido, insistimos, extendiendo los valores desde los puntos interiores a los de tales coronas, con lo que se consigue que en cada instante de integración la malla tenga la misma cantidad de puntos de rejilla útiles para el cálculo.

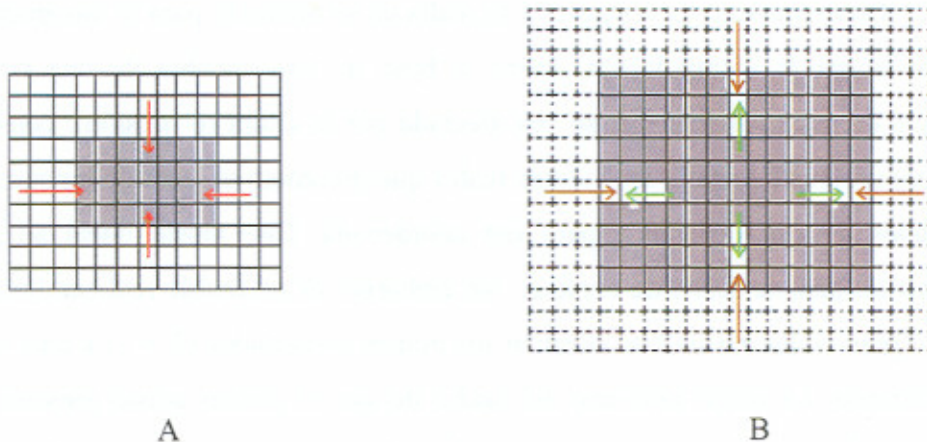


Fig. 5.3- Instante $t-1$ (A): muestra con flechas rojas de la pérdida de tres coronas exteriores en las coordenadas x e y de la malla por los efectos comentados en el texto. Instante t (B), procedimiento de recuperación de esas mismas tres coronas por extensión de valores internos, flechas verdes. Las tres coronas punteadas son las coronas virtuales de fluido añadido. En flechas marrones el efecto de dicho hipotético fluido. En fondo gris (A y B) muestra de las celdillas de malla aptas para la integración del modelo antes del procedimiento (A) y tras la aplicación del mismo (B).

La coordenada vertical z tiene un tratamiento ligeramente diferente, no en lo que a pérdida y reposición por asignación de valores internos se refiere, sino porque la homogeneidad supuesta en el plano XY para todas las variables, sólo es cierta en la coordenada vertical, para la variable presión y únicamente en el caso de

que sea constante con la altura. El procedimiento en este caso, para dicha coordenada, es de aplicación prácticamente igual al de las coordenadas x e y .

Sin embargo, como también se puede utilizar en la integración presión variable linealmente con z en el primer instante y posteriormente evaluar la variación mediante el cálculo de la tendencia barométrica, la técnica de aplicación difiere como es lógico. Aunque el caso de presión variable con la altura se ha resuelto numéricamente por medio de la técnica que se va a describir, a continuación, no está mostrado en esta memoria debido a que no aportaba ninguna información nueva y distinta para ser tenida en cuenta.

Esta técnica nos conduce a proceder de la siguiente manera. Los tres puntos iniciales y finales de la malla, en lo que a la coordenada z se refiere, al igual que con las otras coordenadas, están invalidados a causa de los cálculos de derivadas primeras, derivadas segundas y cálculos promedios, tal y como se explicó con x e y .

Para recuperar esos valores y la malla en su totalidad para la integración, se propone ahora la extrapolación, sobre la base de los cálculos de una recta de variación de cada variable que se vea afectada por la altura (o presión), construida mediante un ajuste lineal a los valores reales que presentan el resto de los puntos no eliminados de esa variable y para esa coordenada. Este ajuste lineal se podría construir tal cual se acaba de explicar, sin embargo, es preferible realizarlo sobre la serie de puntos que restan tras eliminar los puntos invalidados (3 + 3) y uno más en cada extremo. La razón proviene del hecho de que el primer ajuste presenta unas irregularidades en esos cuartos puntos en el siguiente momento de integración que se ven suavizadas al eliminar dichos cuartos puntos para el cálculo de las rectas de ajuste.

Las variables que se van a ver afectadas por la coordenada vertical (presión) son:

- w, \bar{w}, P y \bar{P} (también lo serían sus perturbaciones turbulentas, pero ya hemos especificado que estas variables se obtienen como cálculo de la diferencia entre sus valores puntuales y promedio)

y las rectas de ajuste que se proponen son del tipo $y=mx+n$, obtenidas mediante la aplicación del método de mínimos cuadrados para los puntos de validez en cada caso, excluyendo aquellos que hemos denominado invalidados (4+4).

Por último, los ajustes lineales se han realizado, para los puntos de la vertical (z), sobre un punto del plano XY y extrapolando al resto de los planos horizontales para cada nivel. El punto del plano XY se selecciona siempre del interior del conjunto de puntos de la rejilla que no sufra efectos por los bordes ni por los vórtices que en su momento se ubicarán dentro de la rejilla.

Por esta razón se selecciona un punto alejado, en la vertical, de los bordes verticales (aunque se suavizaron los efectos excluyendo un punto más) y alejado, nuevamente en la vertical, de los efectos que causa ubicar los vórtices. Un punto que verifica estas condiciones resulta ser $(5,5,a)$, con $a=b/2-m/2+1$, donde m es el número de puntos de la malla en el eje X o en Y y b lo mismo para el eje Z. Es recomendable que $b=2m$ al menos con objeto de alejar los efectos no deseados en la vertical, teniendo en cuenta que cuanto mayor sea b más tiempo ha de transcurrir para que el punto seleccionado se vea afectado.

Es de destacar el hecho de que las correcciones verticales (fig 5.4, A) han de ser realizadas antes que las horizontales (fig 5.4, B), puesto que la homogeneización, que ocurre siempre en los planos horizontales y no en los verticales, es posterior.

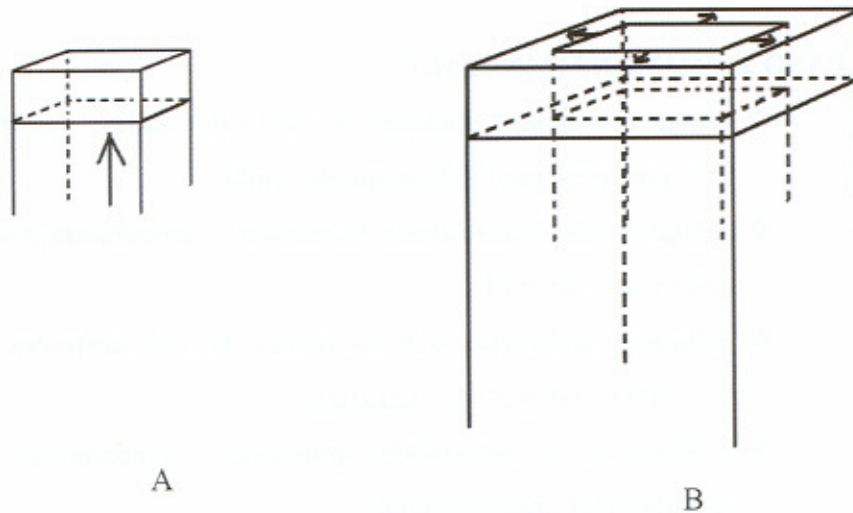


Fig. 5.4- Muestra gráfica de las correcciones verticales (A) de la rejilla y extensiones homogéneas para planos horizontales (B).

V.6 PROCESO DE INTEGRACIÓN

Con el uso de las condiciones iniciales propuestas y de las condiciones de contorno, mediante el lenguaje de programación FORTRAN 90 se ha diseñado el programa para ejecutar el proceso de integración y obtener las variables a partir de la discretización de las ecuaciones.

Los pasos que realiza el programa se pueden esquematizar como sigue:

- **PASO 1 (ASIGNACIONES):**

- ❖ Dimensionar la rejilla.
- ❖ Generar un límite de intervalos temporales de integración.
- ❖ Establecer planos de observación de resultados.
- ❖ Establecer el brazo de red y el intervalo temporal de integración.
- ❖ Asignar valores a variables de las ecuaciones, dentro de las cuales algunas son constantes (p.e. densidad).
- ❖ Dimensionar todas y cada una de las variables del problema, así como otras de operaciones intermedias.
- ❖ Generar ficheros de resultados.

- **PASO 2 (MOMENTO INICIAL):**

- ❖ Asignar valores iniciales a las velocidades, según sus tres componentes, para todo punto de rejilla.
- ❖ Asignar valores iniciales a la presión y temperatura potencial para todo punto de rejilla.
- ❖ Ubicación del vórtice o de los vórtices (lo más centrados posibles en la malla en las tres coordenadas).
- ❖ Cálculo de las velocidades, presiones y temperaturas potenciales medias en el instante inicial.

- **PASO 3 (BUCLE TEMPORAL):**

- **PASO 3.1:**

- ❖ Cálculo de las velocidades y temperaturas perturbadas (p.e. v'), en todos los puntos de rejilla válidos.

- ❖ Cálculo de la Energía Cinética instantánea, media y perturbada, ídem.

- ❖ Cálculo de las componentes del rotacional instantáneo, ídem.

- **PASO 3.2:**

- ❖ Cálculo del promedio de las Energías Cinéticas, en la rejilla de resultados.

- ❖ Cálculo del promedio de las Temperaturas Potenciales Medias, ídem.

- ❖ Cálculo del promedio de las Temperaturas Potenciales, ídem.

- **PASO 3.3:**

- ❖ Cálculo de las componentes promedias y perturbadas de la vorticidad, en los puntos de rejilla válidos.

- ❖ Cálculo de los sumandos de la laplaciana de la velocidad, ídem.

- ❖ Cálculo de los términos tipo $u' \frac{\partial v'}{\partial y}$, ídem.

- **PASO 3.4:**

- ❖ Cálculo de los términos tipo $\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}}$, en los puntos de rejilla válidos.

- **PASO 3.5:**

- ❖ Escribir todas las variables a estudiar en los correspondientes ficheros de resultados creados a tal efecto².

- **PASO 3.6 (integración temporal):**

- ❖ Cálculo de las componentes de velocidad y velocidad media, para el siguiente paso de integración, en los puntos de rejilla válidos.

- ❖ Cálculo de la presión, la temperatura potencial y la temperatura potencial media, ídem, ídem.

² Todos los valores promedios han sido espaciales

○ **PASO 3.7:**

- ❖ Evaluación, para todo punto de rejilla, de la condición $u', v', w' \leq \frac{\bar{u}}{10}, \frac{\bar{v}}{10}, \frac{\bar{w}}{10}$ (también se ha incorporado esta misma condición para la temperatura potencial). En el caso de que se cumpla se continúa con el paso 3.9 (manteniendo los cálculos de 3.6), si no con el paso 3.8 (modificando los cálculos de 3.6 según $\Delta_k t$).

○ **PASO 3.8:**

- ❖ Las componentes de la velocidad instantánea se obtienen a través de la resolución numérica de las ecuaciones 5.9 ($\Delta_k t$), identificando las soluciones de esas ecuaciones con las velocidades instantáneas.

○ **PASO 3.9:**

- ❖ Acumulación en memoria de todas y cada una de las variables que necesiten ser promediadas en el tiempo, en el sistema de cálculo de $\Delta_k t$ ³.

○ **PASO 3.10 (sólo si se pasa por 3.8):**

- ❖ Las componentes promedias de la velocidad, de presión (idéntica a la instantánea cuando no se plantea variación vertical) y la temperatura potencial, se obtienen del promedio de los últimos 10 datos disponibles en cada caso, incluido el del momento actual de integración ($\Delta_k t$)⁴.

○ **PASO 3.11:**

- ❖ Generación de las rectas de regresión lineal por el método de mínimos cuadrados para todas y cada una de las variables que se ven afectadas por variaciones verticales.

³ Para realizar este proceso, independientemente de la variable, se van despreciando de la memoria todas aquellas informaciones que se separen en el tiempo más de 9 intervalos de tiempo.

⁴ El promedio de la variable, a trabajar en cada momento, se obtiene como la suma de la variable en el momento t más en los nueve momentos anteriores, todo ello dividido por 10.

○ **PASO 3.12:**

- ❖ Restauración, a través de las líneas de regresión del paso anterior, de las componentes instantáneas y medias de la velocidad, de la presión y de la temperatura potencial en las coronas verticales primera, segunda y tercera y antepenúltima, penúltima y última (3+3).
- ❖ Ídem con las coronas del eje Y, por homogeneización (3+3).
- ❖ Ídem con las coronas del eje X, ídem (3+3).
- ❖ Se reenvía el proceso de cálculo al PASO 3 (3.1) para el comienzo de los cálculos de los términos intermedios en el siguiente paso de tiempo. La única salvedad es que si volvemos dentro del $\Delta_k t$ los promedios temporales de cualesquiera de las variables se calcularán con los datos acumulados según el paso 3.9.

ANEXO III. CÁLCULOS AUXILIARES

Según el Primer Principio de la Termodinámica:

$$\delta q = C_v dT + P d\alpha = C_p dT - \alpha dP \quad (\text{A.III.1})$$

donde δq es el calor por unidad de masa.

De la ecuación de los gases perfectos:

$$P = \rho RT \quad (\text{A.III.2})$$

de donde, y con el uso de la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\text{div} \mathbf{v} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \quad (\text{A.III.3})$$

como $\rho = 1/\alpha$ se obtiene:

$$P\alpha = RT \rightarrow P d\alpha + \alpha dP = R dT \quad (\text{A.III.4})$$

si ahora dividimos la expresión del primer principio por dt y operando:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p} \frac{\delta q}{dt} + \frac{\alpha}{C_p} \frac{dP}{dt} \quad (\text{A.III.5})$$

operando con las expresiones anteriores:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\text{div} \mathbf{v} + \frac{1}{T} \left(\frac{1}{C_p} \frac{\delta q}{dt} + \frac{\alpha}{C_p} \frac{dP}{dt} \right) \quad (\text{A.III.6})$$

con lo que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{P\alpha}{TC_p}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} &= -\text{div}\mathbf{v} + \frac{1}{T} \frac{1}{C_p} \frac{\delta q}{dt} = \left(1 - \frac{R}{C_p}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \left(\frac{C_p - R}{C_p}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \\ &= \left(\frac{C_v}{C_p}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A.III.7})$$

Despejando:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla P - \gamma P \text{div}\mathbf{v} + \frac{\gamma P}{TC_p} \frac{\delta q}{dt}} \quad (\text{A.III.8})$$

Ecuación de la Tendencia Barométrica

Utilizamos, como aporte energético, el procedente de la pérdida de energía por fricción molecular a partir de la escala de Kolmogorov en los eddies turbulentos. Así pues, esta hipótesis conduce a que el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento coincidiría con δq ; es decir:

$$dW_{F_r} = \mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt \quad (\text{A.III.9})$$

Con lo que:

$$\frac{dW_{F_r}}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.III.10})$$

y, con la igualdad establecida:

$$\frac{\delta q}{dt} = \frac{dW_{F_r}}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.III.11})$$

Definitivamente:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla P - \gamma P \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\gamma P}{TC_p} \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (\text{A.III.12})$$

Aplicando la ecuación de continuidad para fluido homogéneo y operando:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla P + \frac{\mu R}{C_v} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (\text{A.III.13})$$

CAPITULO VI
ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL MODELO.
1 VÓRTICE

VI.1 INTRODUCCIÓN

Una vez descritas, en capítulos anteriores, las ecuaciones teóricas que se han obtenido en este trabajo, así como la discretización de las mismas y el planteamiento de factores numéricos de importancia indudable para la puesta a punto de las condiciones de contorno y límite, se han resuelto, con el método de incrementos, las ecuaciones a las que se ha llegado tras la aplicación de dichos factores.

En este capítulo y en el siguiente se van a presentar las evoluciones de diferentes situaciones iniciales entre las que cabe destacar el posicionamiento de uno o tres vórtices en el centro aproximado de la malla para evitar la pronta influencia de los bordes (fronteras) de la misma o la interacción entre los vórtices y la de éstos con aquellos.

La mecánica de desarrollo se ha basado en diferentes transcurros temporales (pasos temporales de integración) y distintas mallas o tamaño de las mismas, siempre en función de la capacidad de las computadoras utilizadas y buscando un intervalo o recorrido total del tiempo que nos aleje suficientemente del inicio de la evolución para cada problema propuesto, con el objeto de conseguir un desarrollo suficientemente aceptable de cada propuesta.

Tal y como se ha especificado detalladamente en el capítulo anterior, la herramienta utilizada en un primer estadio, para evitar en la medida de lo posible la influencia de las fronteras, ha consistido en analizar un subconjunto de la malla total constituido por zonas de la misma que, una vez realizada la integración temporal del modelo sin la incorporación o existencia de vórtices, no hubiesen sido afectadas por la interacción de las posibles influencias exteriores. De este subconjunto, para reponer los valores en las coronas eliminadas por influencia de los bordes, se ha seleccionado otro subconjunto menor de puntos de la malla en un segundo paso, que tampoco fuesen afectados por la existencia de los vórtices impuestos; esto es, lo más alejado posible de los bordes y de los vórtices simultáneamente, para todos los pasos de integración.

Por lo tanto, las fronteras de la malla total han de ser reconstruidas para cada paso de integración intentando, en la medida de lo posible y en cada momento, verificar las condiciones del párrafo anterior.

La integración se ha efectuado, como ya se especificó en otro epígrafe, en tres fases distintas. En cada una de ellas las ecuaciones matemáticas para la obtención de las variables necesarias (u , v , w , θ y P , y sus valores promedios, en todos los puntos de la rejilla), para continuar con la integración, difieren según se especificó en el capítulo anterior.

Esta integración nos permitirá la evaluación de las variables dinámicas y térmicas para la construcción y el desarrollo de los vórtices convenientemente colocados según se comentó.

Las aplicaciones concretas pasan por mostrar gráficamente las evoluciones temporales y espaciales de los diferentes vórtices propuestos fundamentalmente a través de las componentes de la velocidad, aunque también con el uso de la temperatura potencial. A través de esta magnitud y por medio del uso de una de las ecuaciones propuestas, concretamente la ecuación de difusión, podemos estudiar la evolución de la energía térmica asociada a las perturbaciones turbulentas inducidas por los vórtices.

Anticipamos que las integraciones serán consideradas como suficientemente desarrolladas cuando se alcance la afectación del vórtice en todo el recinto preconsiderado, capítulo VI, o cuando la presencia de varios vórtices muestre la interacción con suficiente detalle como para que la identificación de cada uno de ellos no sea posible, capítulo VII.

Destacamos por último, antes de continuar con el desarrollo central del capítulo, que el transcurso del tiempo ha llevado consigo un crecimiento de las perturbaciones hasta no ser posible sucesivas aplicaciones, dada la enorme magnitud de las variables calculadas. Este problema ha sido resuelto, al menos en parte, como más adelante se detallará, con el cambio de ecuaciones diferenciales para la integración. Pese a todo, los errores de truncación del modelo incapacitan los resultados para un número de pasos de tiempo exageradamente grande.

El desarrollo de los capítulos VI y VII se presentará, para cada caso de estudio, en los siguientes epígrafes: en primer lugar el planteamiento de la malla y los pasos de integración para cada propuesta, a continuación se construirán los mapas de velocidad para problemas tridimensionales y se mostrarán para diferentes secciones del fenómeno, en tercer lugar, se detallará el crecimiento de la valoración numérica de los campos indicados en el epígrafe inmediato anterior continuando con la muestra gráfica de las evoluciones espacio-temporales de los vórtices propuestos y

por último se comentarán los resultados a los que se haya llegado tras el desarrollo de los epígrafes expuestos.

VI.2 EVOLUCIÓN DE UN VÓRTICE AISLADO

En aplicación de todas las propuestas anteriores presentamos en este epígrafe la integración temporal en un recinto dado y verificando todas las condiciones relevantes especificadas.

VI.2.1 CONDICIONES INICIALES

De todos los tamaños de malla ensayados el que mejor resultados ha proporcionado es el de 60x60x120 puntos de rejilla. Las consideraciones utilizadas para delimitar este tamaño de malla se han basado fundamentalmente en la consecución de errores lo más pequeños posibles dentro de este modelo, así como la minimización de efectos dispersivos para todas y cada una de las variables utilizadas.

El vórtice que caracteriza este epígrafe se situó en el centro de la malla, es decir, punto 30x30x60. Dinámicamente caracterizado por una disminución o aumento de las componentes de la velocidad en torno a un 2% de su valor en el resto de los puntos de la malla en el que consideramos no perturbado el campo de velocidades, lo cual conduce a una cuantificación de 5, 5, 0'5 para las tres componentes y 5'1, 4'9, 0'49 para la caracterización dinámica del vórtice (con estos datos numéricos de entrada en el modelo disponemos de componentes de la vorticidad no nulas suficientes para su estudio).

Estas consideraciones de cuantificación, tanto para el tamaño del vórtice, que puede considerarse en valor promedio del orden de 20 unidades para la escala L de tamaños como para el valor del módulo de la velocidad en torno a 5 unidades junto con una viscosidad según considerada en la asignación numérica del modelo de 10^{-5} , indican que estamos trabajando en una situación de número de Reynolds aproximadamente de 10^7 ; es decir, régimen turbulento que se desarrollará desde un estado inicial hasta uno avanzado suficientemente como para que la turbulencia pueda ser considerada como totalmente desarrollada.

Los pasos de integración, Δt , se han normalizado mediante el uso del tiempo total de integración valorándose como número de pasos realizados, encontrándose normalmente en los ejes coordenados X para cada figura temporal y mostrando la evolución de cada magnitud a través del conteo del número de pasos de integración. De igual manera se normalizan los valores de algunas de las variables que representan la evolución de los vórtices mediante las medias en cada caso y se sitúan sus valores relativos en los ejes Y.

Estas bases de cálculo se muestran como el inicio de desarrollo para el resto de los casos que se estudiarán como aplicación del modelo propuesto, aunque

presentemos características diferentes, por ejemplo, al proponer la presencia de varios vórtices en el centro de la malla.

VI.2.2 VARIABLES PUNTUALES. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

El número total de intervalos temporales de integración a lo largo de la segunda fase, según descritos más arriba, se extiende hasta que los aumentos o dispersiones de cualquiera de las variables estudiadas (u , v , w y θ), por efecto fundamentalmente de las discretizaciones de las funciones continuas de las ecuaciones del modelo, no superen el 10% del valor medio para cada una de ellas (a partir de este instante entrará en el modelo la tercera fase descrita en los capítulos anteriores).

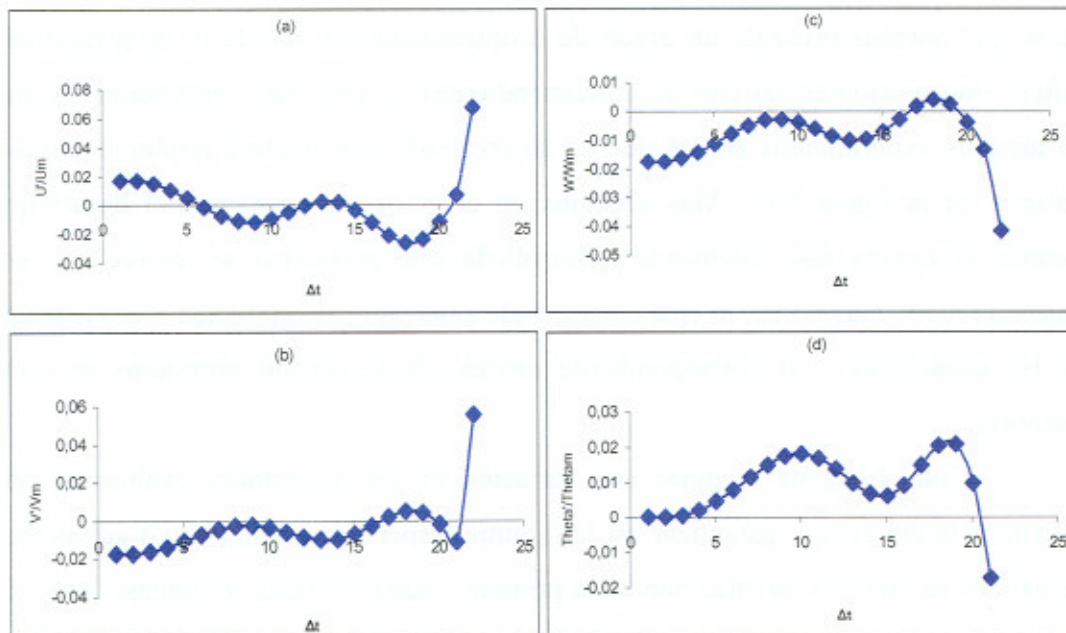


Fig. VI.1- Evolución temporal de la dispersión relativa al promedio temporal (22 pasos) de cada serie de las tres componentes de la velocidad junto con la temperatura potencial, para el punto central de la malla, a lo largo de la primera y segunda fases de integración, obtenidas mediante el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes. (a) componente u , (b) ídem v , (c) ídem w y (d) Temperatura Potencial (θ).

La figura VI.1 muestra las evoluciones temporales de las salidas del modelo para las variables u' , v' , w' y θ' , en el punto central de la malla, normalizadas con los promedios temporales u_m , v_m , w_m y θ_m de los valores puntuales correspondientes u , v , w y θ , dentro del tiempo total de integración de esta fase. Las evoluciones obtenidas corresponden a la segunda fase de integración propuesta por el modelo, en la cual la dinámica viene gobernada por las ecuaciones de Navier-Stokes para la obtención de valores puntuales de los campos, junto con las ecuaciones propuestas en el modelo de esta memoria para los correspondientes valores medios, lo cual nos ha permitido

evaluar las perturbaciones turbulentas como diferencia de estos resultados del cálculo. Esta fase de integración finaliza, como ya se ha establecido, cuando la variación alcanza un valor en las perturbaciones que supere el 10% de los valores medios, \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} o $\bar{\theta}$, correspondientes al uso y discretización de las ecuaciones de régimen turbulento, calculados para todos los intervalos de tiempo, lo cual ocurre en el paso número 22 de integración.

Es destacable además que, en dicho punto y bajo consideraciones temporales, la cuantificación relativa de las perturbaciones evaluadas sobre los valores medios es del mismo orden para u , v , w y θ .

Podría además sugerirse que las perturbaciones de u y v son opuestas a las de w que además presenta un grado de acoplamiento con las de θ , propiedad de difícil observación en las curvas correspondientes a esta fase excepción hecha de algunos experimentos en los que se ha mostrado con relativa nitidez como se observa en la figura VI.1. Más adelante, en el momento en el que el desarrollo alcance la tercera fase totalmente desarrollada esta propiedad se mantiene y se muestra mucho más nítida, lo cual corresponde a una aplicación iterada y consistente de las ecuaciones y el correspondiente modelo de desarrollo propuesto en esta memoria.

Con objeto de asegurar una variación de las magnitudes evaluadas aún inferior a la del 10% y garantizar así la mínima dispersión exigida como condición de validez mostramos una fracción de la primera y segunda fases conjuntas, desde el punto de vista del estudio, comprendida entre el paso 1 y el paso número 20. En la figura VI.1 se observa la posición de los pasos 20 y 22 para el punto central de la malla entre los que se sufre una exagerada dispersión que queda eliminada con la elección del paso 20, lo cual se utilizará para mostrar las evoluciones espacio-temporales del propio vórtice en los diferentes cortes verticales (YZ) y horizontales (XY) en las siguientes figuras.

Las figuras VI.2 a VI.7 muestran la evolución espacial y temporal de las variables u , w y θ para diferentes pasos de integración sufrida por este supuesto vórtice situado en el centro de la malla a lo largo de los 22 primeros pasos del modelo de integración reseñados con anterioridad, seleccionando para ello los momentos 1, 5, 10 y 20.

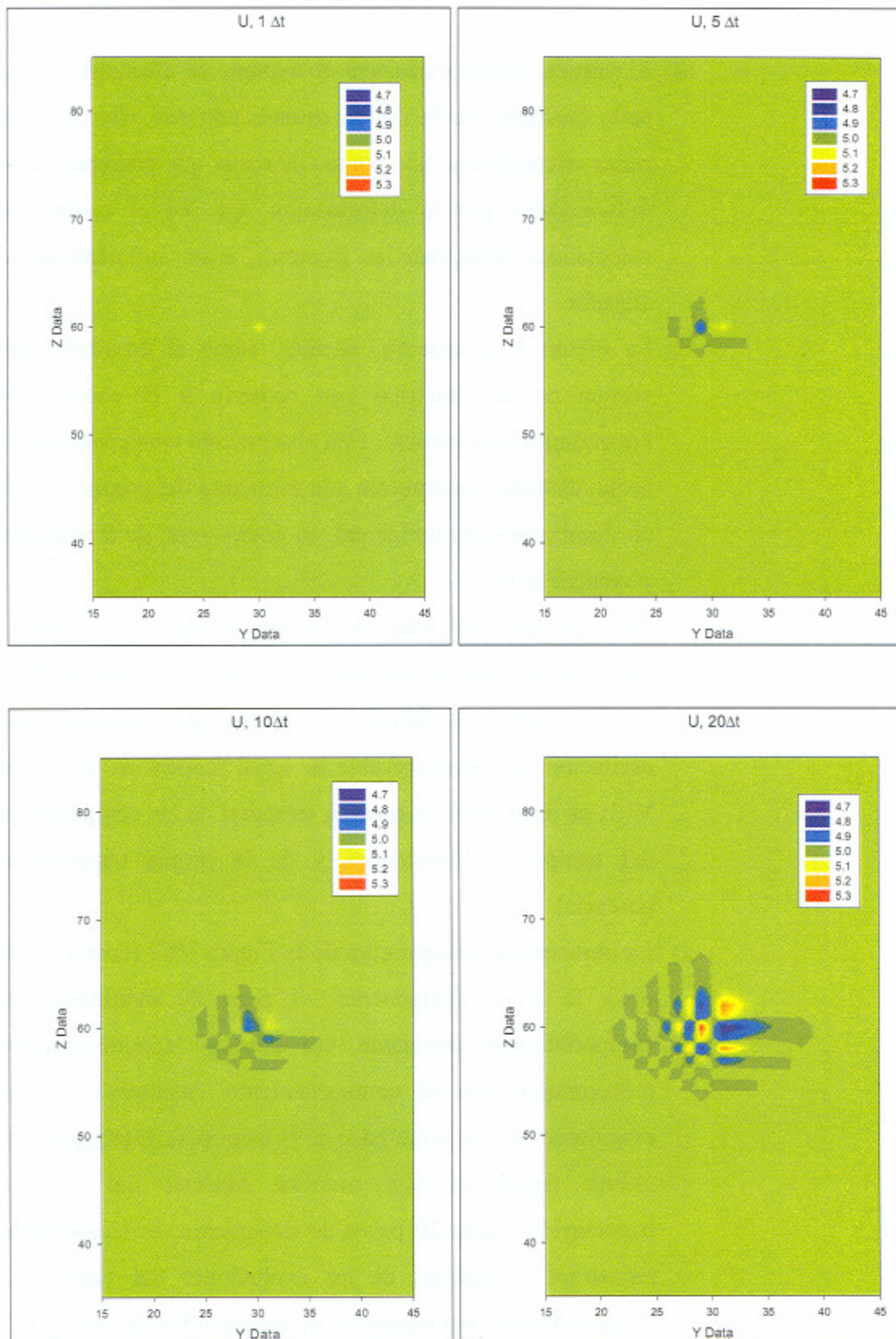


Fig. VI.2- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente u desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$, momento muy cercano al instante en el que se da paso a la técnica final de integración. La asignación numérica a los diferentes colores de las figuras se ha unificado tomando como base la escala de la última de ellas ($20\Delta t$). Cortes en planos YZ para $x=30$, centrado en la malla.

Un análisis detallado pone de manifiesto que:

- a) El vórtice, según transcurre el tiempo, va afectando a una parte creciente de la malla, extendiendo sus efectos a las zonas circundantes. Los puntos de malla que pudieran verse influenciados por la deformación, que en el campo de velocidades inducirían las fronteras, están suficientemente alejados.
- b) La Figura VI.2 muestra, además, cómo el desarrollo del vórtice no es simétrico con respecto a la coordenada horizontal ni a la vertical. Esta observación concuerda con el hecho de haber superpuesto a la estructura del propio vórtice un desplazamiento horizontal, en ambos ejes, de 5 unidades y vertical de 0'5.
- c) Esta propia velocidad de desplazamiento se traduce, asimismo, en que las perturbaciones que el vórtice produce sobre el campo de velocidades, se propagan siguiendo una oscilación que es observable de igual manera en la Figura VI.1; es decir, en la evolución temporal de las componentes del campo de velocidades y de la propia temperatura potencial.
- d) La observación comparativa de la Figura VI.2 (componente u) y la VI.3 (componente w) pone de manifiesto un comportamiento semejante –no idéntico– aunque opuesto (concordante con el comportamiento cualitativo de las magnitudes u y w como base de la isotropía). Dado que esta última figura es una muestra espacial del vórtice, transcurridos hasta 20 pasos de integración, es conveniente remitirnos al análisis de las evoluciones del campo de velocidad, más concretamente de las perturbaciones u' y w' , para estudiar la existencia o no de la isotropía espacial (y no sólo temporal) entre dichas perturbaciones, referida lógicamente a las zonas afectadas por el desarrollo del vórtice (este análisis se realizará posteriormente utilizando

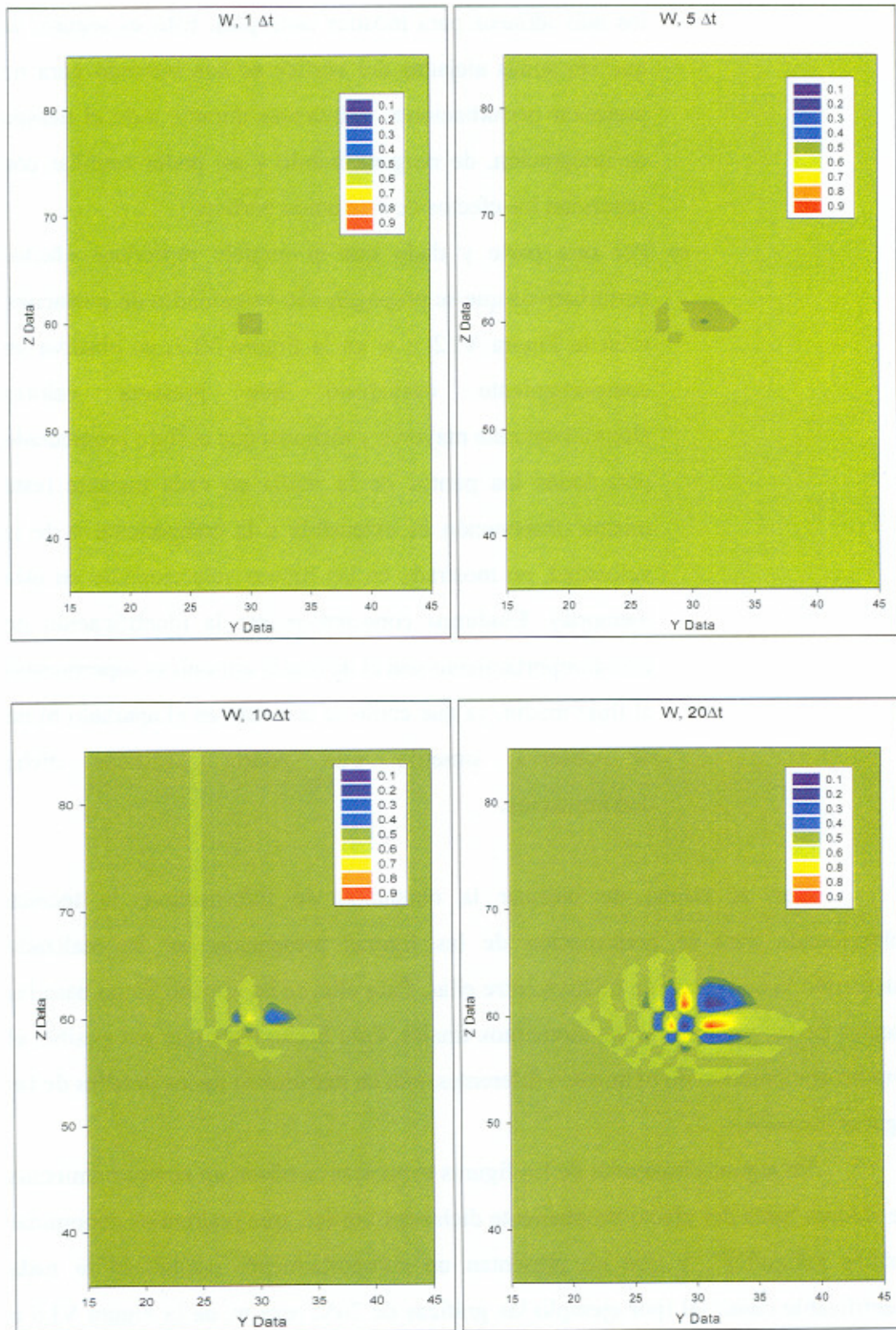


Fig. VI.3- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente w desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. En la Figura correspondiente a $w, 10\Delta t$, aparece una banda anómala de asignación numérica errónea debida al software gráfico utilizado.

los últimos pasos de integración que, caso de existir, serían los más idóneos para mostrar isotropía). Esto es seguro, ya que las zonas alejadas del vórtice se han buscado para no presentar perturbaciones turbulentas durante todo el tiempo de integración, de ninguna índole y así poder estudiar con seguridad los efectos de este único vórtice.

- e) Por otra parte y dado que el modelo reproduce efectos perturbativos que se propagan con velocidades de traslación, u en la Figura VI.2 y w en la Figura VI.3, se observa un comportamiento oscilatorio que presenta valores alternativamente mayores y menores que el flujo promediado para todos los puntos de la rejilla en cada instante (esta misma observación es extensible a la componente v de la velocidad, no mostrada en las figuras seleccionadas en esta memoria). Eludimos conscientemente la identificación de este comportamiento con el de ondas armónicas superpuestas al flujo medio, ya que como se comentó en el apartado b) no se observa simetría que podría justificar dicha denominación.

Con el objeto de unificar la obtención de información, la técnica seleccionada para la presentación de las figuras presentadas se ha realizado intentando la comparación relativa entre ellas. Para ello, se ha tomado como base las escalas de las gráficas de los momentos finales. Este hecho hace que sea posible el estudio comparativo de momentos diferentes, aún en detrimento de los detalles de las figuras iniciales.

En algunas imágenes de las figuras expuestas se observan comportamientos de valores fuera del efecto propiamente dicho del vórtice, que podríamos denominar “trazos anómalos”, y que no presentan un comportamiento oscilatorio ni nada identificable como tal (por ejemplo las gráficas de $20\Delta t$ para w , de la Figura VI.6 o las de $5\Delta t$, $10\Delta t$ y $20\Delta t$ para u' , en la Figura VI.9). Revisados los valores numéricos de éstas y otras gráficas con efectos semejantes, se ha detectado que es un pequeño error del software de traducción gráfica, ya que los valores en las cercanías de esas zonas no presentan ninguna alteración cuantitativa respecto del valor que

debiera corresponder a esos puntos y sus alrededores. Concretamente, en el caso de la gráfica $20\Delta t$ de la Figura VI.6, el valor de la componente w de la velocidad para todos los puntos de la malla situados en el nivel de 70 unidades para la coordenada Z es de 0'5.

- f) La Figura VI.4, que presenta el comportamiento y la evolución de la magnitud Theta (temperatura potencial), no muestra la presencia de ninguna perturbación en el instante inicial en el que se ha perturbado el campo de velocidades para generar el vórtice de estudio, indicando con ello que no son efectos térmicos los que se han utilizado para generar dicho vórtice.
- g) Transcurridos intervalos de integración 5, 10 y $20\Delta t$, aparecen perturbaciones en la temperatura potencial, procedentes lógicamente de efectos dinámicos, que están generadas por el desarrollo espacio-temporal del vórtice impuesto, tal y como era previsible.
- h) Es observable también que una vez que la temperatura potencial queda afectada por las variaciones del campo de velocidad producidas por la instalación del vórtice en la malla (intervalos de integración mencionados en apartados posteriores) continúa la interacción de las perturbaciones de dicho campo sobre el de las temperaturas potenciales y viceversa.
- i) Como resultado, la comparación de esta Figura VI.4 con la VI.3 muestra que, cuando el tiempo transcurrido es suficiente (gráfica $20\Delta t$, tanto para θ como para w), aparece un acoplamiento entre el comportamiento de ambas magnitudes, lo cual físicamente era también previsible ya que los movimientos verticales están influenciados directamente por la distribución térmica vertical a través de la estratificación y se ven afectados por la misma para cualquier tipo de estado termodinámico del fluido.

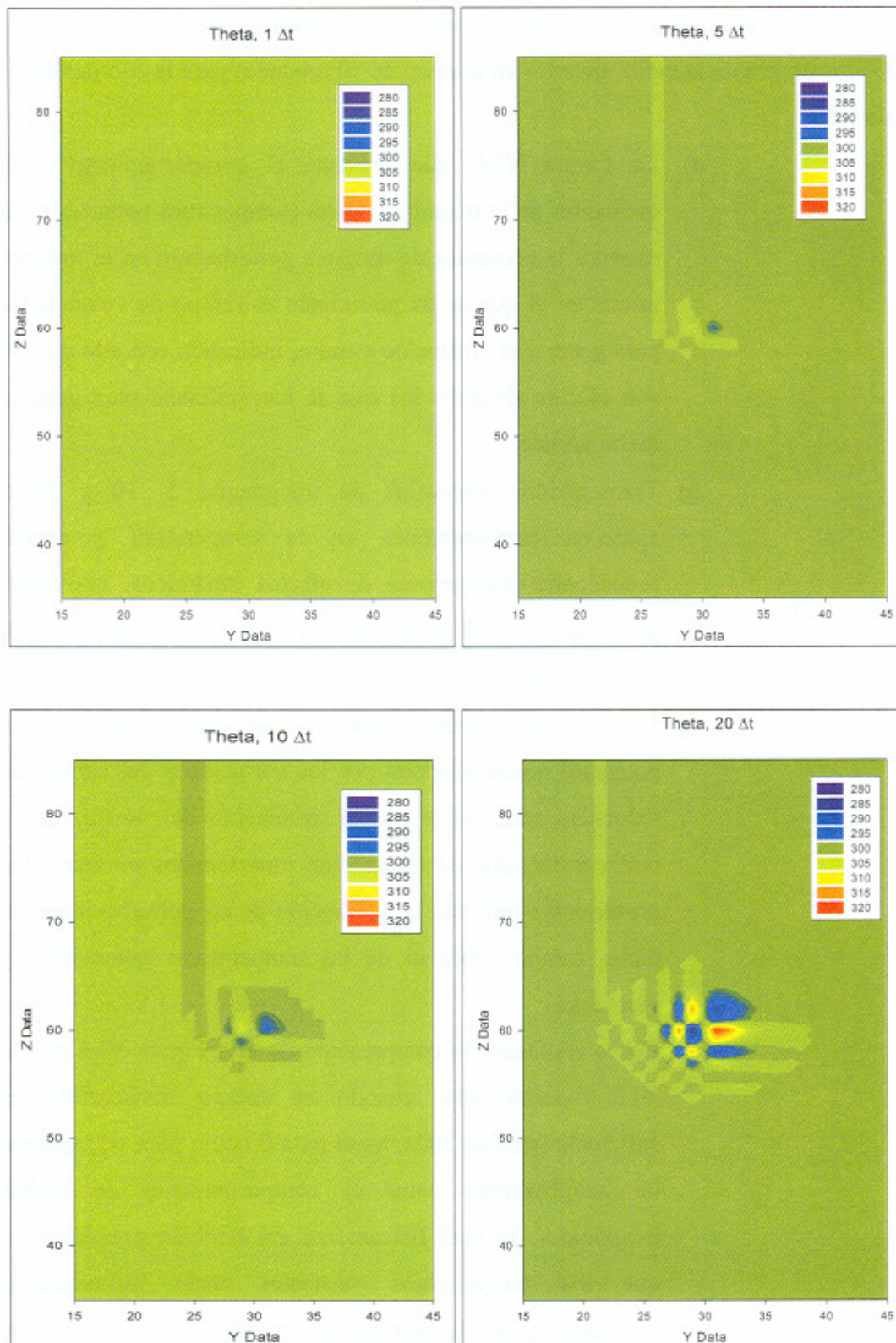


Fig. VI.4- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia. Se muestra la variable temperatura potencial (Theta) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

- j) El acoplamiento mencionado en el párrafo inmediato anterior tiene lugar afectando a áreas de la malla prácticamente iguales, precisamente las comprendidas entre 53-67 para la coordenada vertical y 21-39 para la horizontal, tanto para la componente w como para la temperatura potencial.
- k) De nuevo, las gráficas θ $5\Delta t$, $10\Delta t$ y $20\Delta t$, de la Figura VI.4, muestran comportamientos anómalos no coincidentes con las valoraciones numéricas que corresponden y por lo tanto no reales.
- l) Las figuras VI.5, VI.6 y VI.7 corresponden, de nuevo, al desarrollo de los 20 primeros pasos de integración y las evoluciones, en planos horizontales (XY), de las magnitudes u , w y θ que en ellos se observan, concretamente a la altura de la implantación inicial del vórtice ($z=60$). Los instantes elegidos son exactamente los mismos que los seleccionados para la construcción de las figuras VI.2 a VI.4, con el objeto de hacer comparables las observaciones que de unas y otras figuras se detallen.
- m) A diferencia del espacio perturbado, que se alcanza en el momento de integración $20\Delta t$ en las figuras VI.2 a VI.4, ahora la zona que sufre los efectos de la presencia del vórtice centrado pasa a ser entre 20 y 40 para el eje X y otro tanto ocurre para el eje Y. Esta igualdad en el tamaño afectado, tanto para el eje X como para el eje Y, viene justificada porque en los planos horizontales el vórtice sufre un desplazamiento idéntico en ambos ejes motivado por las condiciones iniciales del problema, según las cuales $u=v=5$.
- n) Con objeto de justificar convenientemente este último comentario y el nominado por la letra e), se han realizado experimentos computacionales de vórtices sometidos a condiciones iniciales de desplazamiento idéntico en las tres coordenadas. No se incorporan las gráficas, ya que es

innecesario su estudio, pero las zonas afectadas en la malla tienen igual tamaño para las tres coordenadas a causa de que la velocidad del desplazamiento se ha buscado como $u=v=w=5$.

- o) Al igual que en las figuras VI.2 a VI.4 se observan también oscilaciones no simétricas y no puras o, lo que es lo mismo, no armónicas.

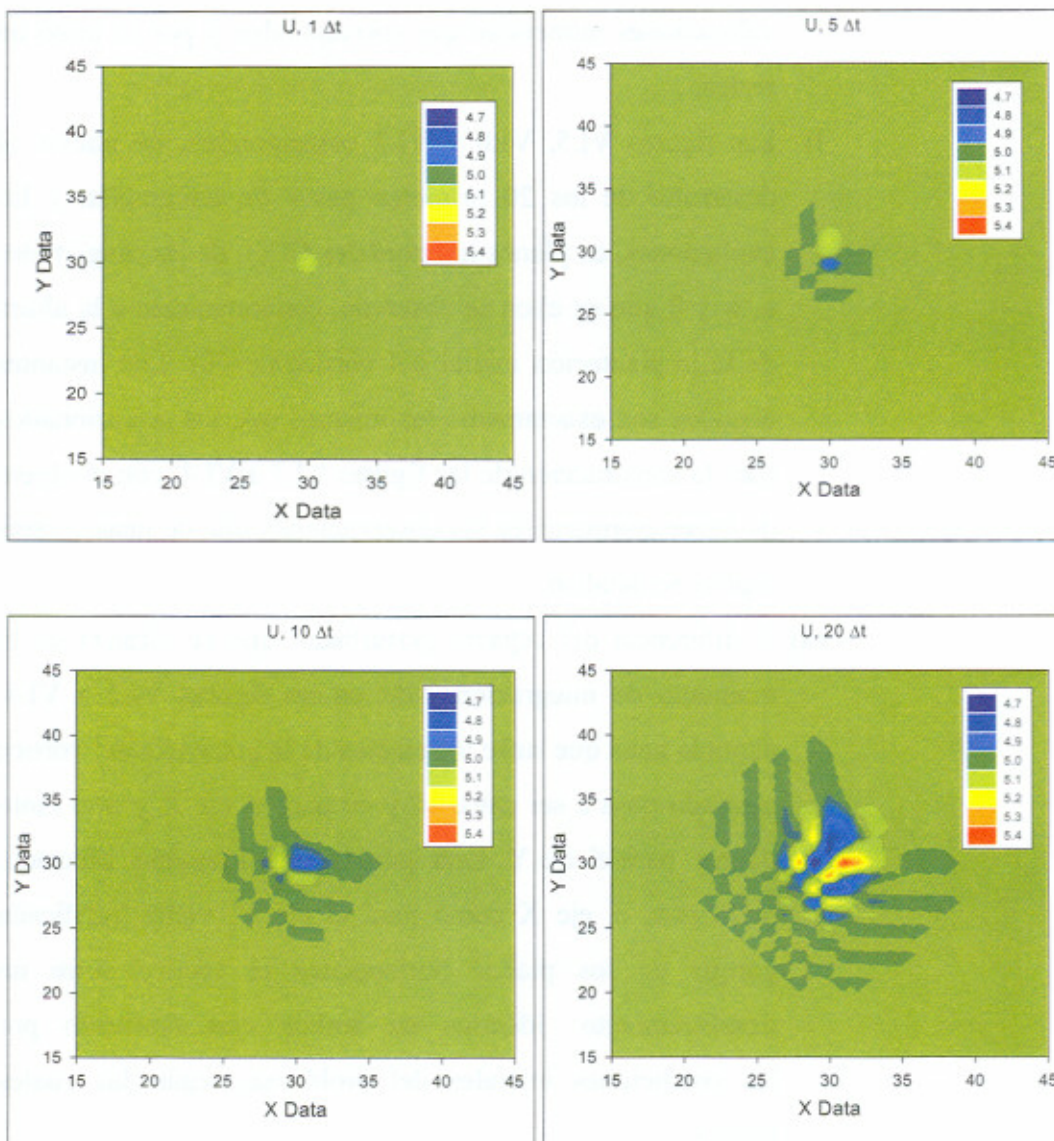


Fig. VI.5- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente u desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$, momento muy cercano al instante en el que se da paso a la técnica final de integración. La asignación numérica a los diferentes colores de las figuras se ha unificado tomando como base la escala de la última de ellas ($20\Delta t$). Cortes en planos XY para Z centrado en la malla.

Tal y como se estableció anteriormente, las figuras VI.5 a VI.7 muestran la evolución de las mismas variables que acabamos de detallar pero en planos horizontales ($Z=60$), centrados en la malla y para los mismos intervalos de tiempo de integración, a saber: 1, 5, 10 y $20\Delta t$.

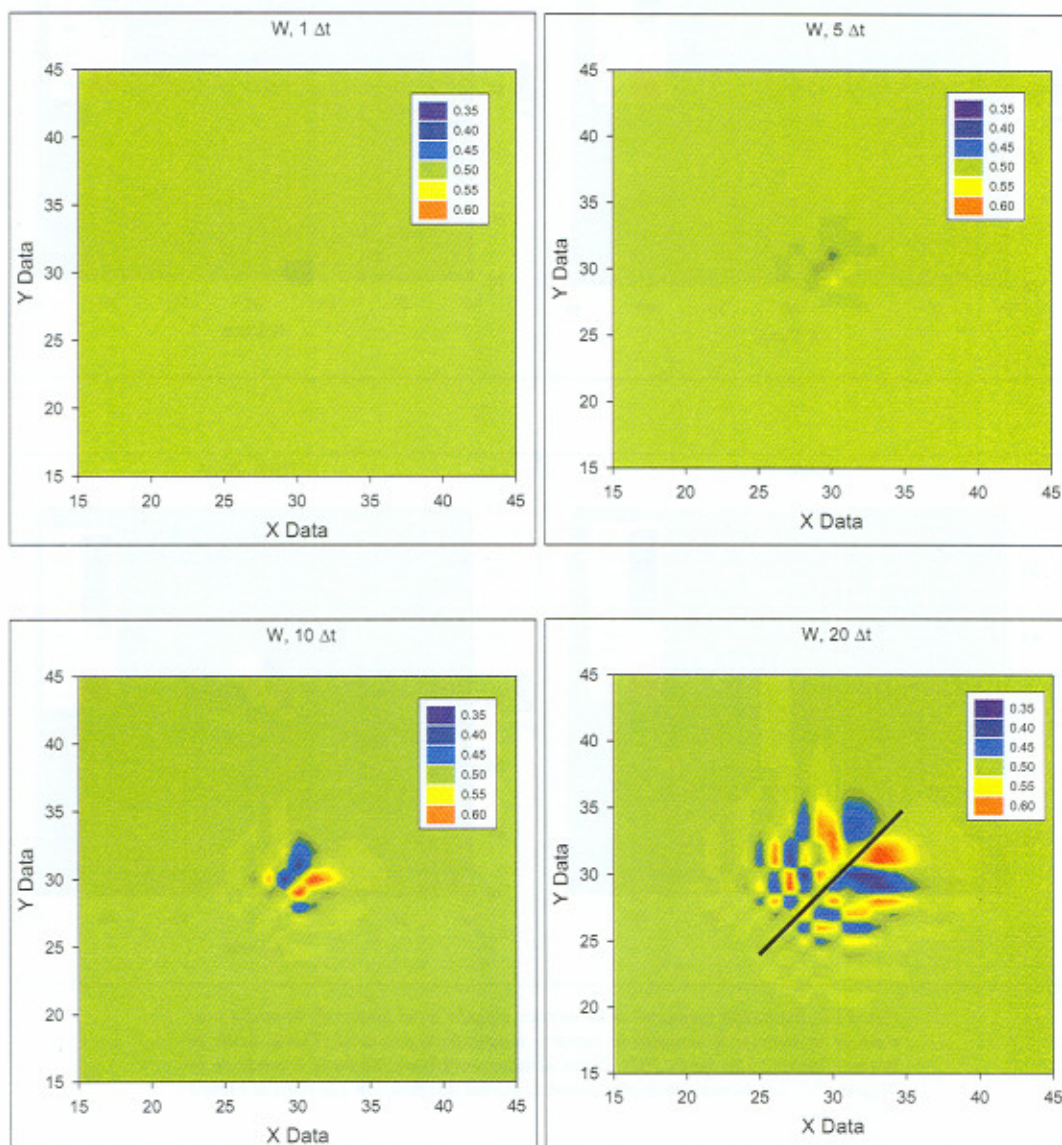


Fig. VI.6- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente w desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. En la Figura correspondiente a w , $20\Delta t$, aparece una banda anómala de asignación numérica errónea debida al software utilizado.

- p) La observación macroscópica de estas figuras, por ejemplo la VI.5, pone de manifiesto que la evolución temporal se traduce en un aumento de la zona de la malla de integración

afectada por las perturbaciones inducidas por la ubicación del vórtice en el centro de la misma.

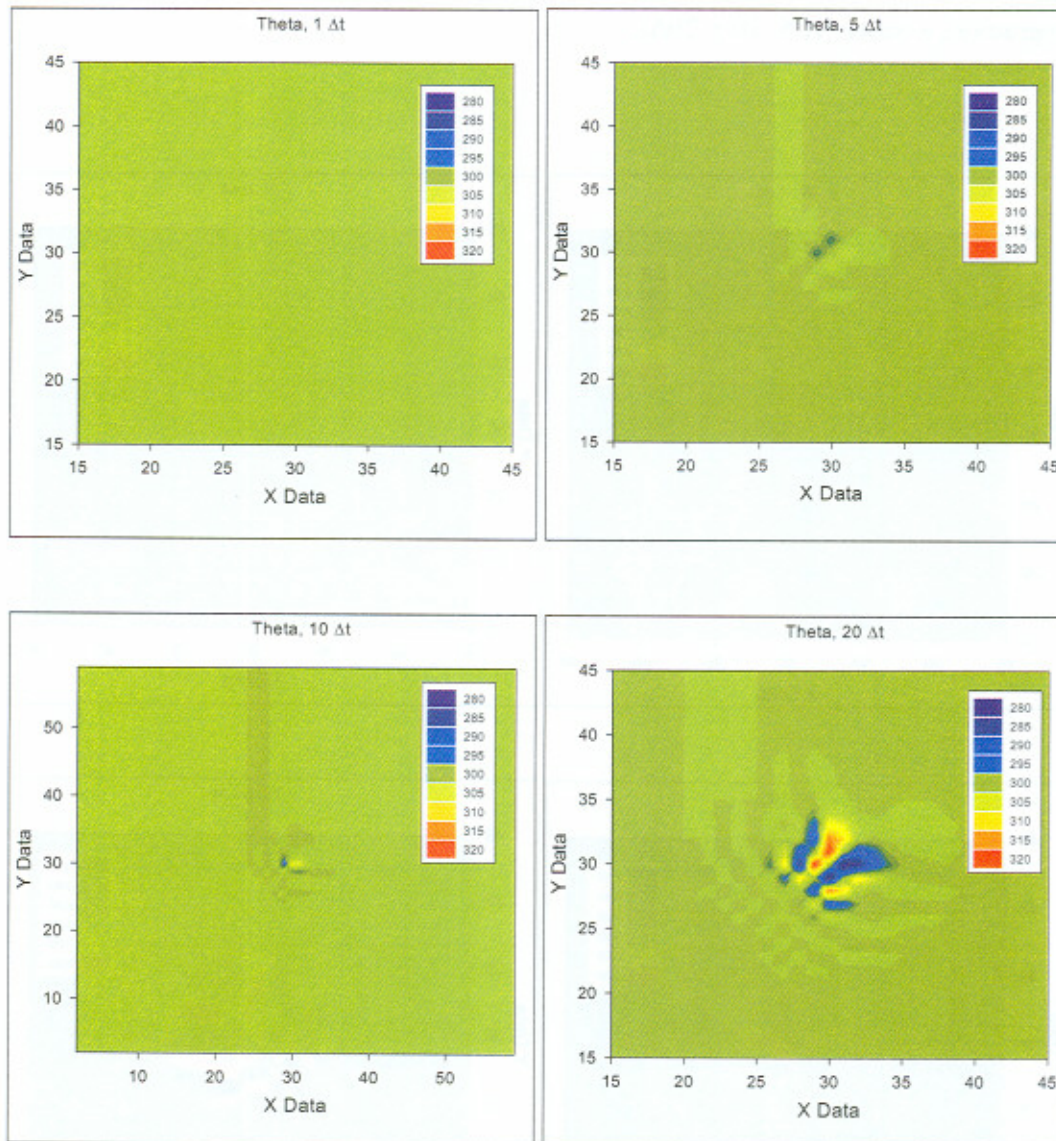


Fig. VI.7- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la variable temperatura potencial (Θ) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

- q) De nuevo se observa un desplazamiento, Figura VI.6, a causa de los movimientos $u=5$, $v=5$ que sitúan la perturbación a lo largo aproximadamente de la bisectriz de la figura y la superposición de oscilaciones, una vez más no simétricas ni armónicas (como se ha mencionado en los apartados f y o), que proceden de la alternancia de

velocidades mayores y menores que una media preestablecida.

- r) La zona afectada para cualquier intervalo temporal de muestreo presenta una aproximada igualdad de tamaños en dos supuestos ejes e hipotéticamente situados en $X=30$ e $Y=30$ (25-35 para ambos ejes, Figura VI.7). A diferencia de lo observado en las figuras VI.2 a VI.4, en donde las áreas afectadas no presentaban tamaños comparables ni sobre el eje Y ni sobre el eje Z (la justificación correspondía en este caso a las velocidades $u=5$ y $w=0.5$).
- s) Por último, entre las Figuras VI.3 y VI.4 se observaba para $20\Delta t$ un acoplamiento entre las magnitudes w y θ , perfectamente asociado a perfiles verticales de ellas y a las convecciones asociadas. Éste no puede ser el caso de las figuras VI.6 y VI.7 para los mismos intervalos de integración, ya que corresponden a cortes horizontales y no a perfiles.
- t) Una vez más volvemos a insistir sobre los defectos del software gráfico utilizado que muestra valores no existentes en las series numéricas de los resultados obtenidos (Figura VI.6, $20\Delta t$).

VI.2.3 PERTURBACIONES TURBULENTAS. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

Las figuras VI.9 y VI.10 corresponden a las muestras espaciales y evoluciones temporales de las perturbaciones del campo de velocidades según la descomposición de Reynolds; es decir: u' y w' (no se muestran los comportamientos exhibidos por v' por idéntica razón que la argumentada en el apartado e). A lo largo de los veinte primeros momentos de integración se observa que:

- a) Al igual que las magnitudes u y w correspondientes a las figuras VI.2 y VI.3, en estas últimas observamos que tanto u' como w' evolucionan afectando a espacios de malla crecientes con el tiempo (5 , 10 y $20\Delta t$) y presentando simultáneamente alternancia de valores mayores y menores que cero ya que en este caso $\overline{u'} = \overline{w'} = 0$.

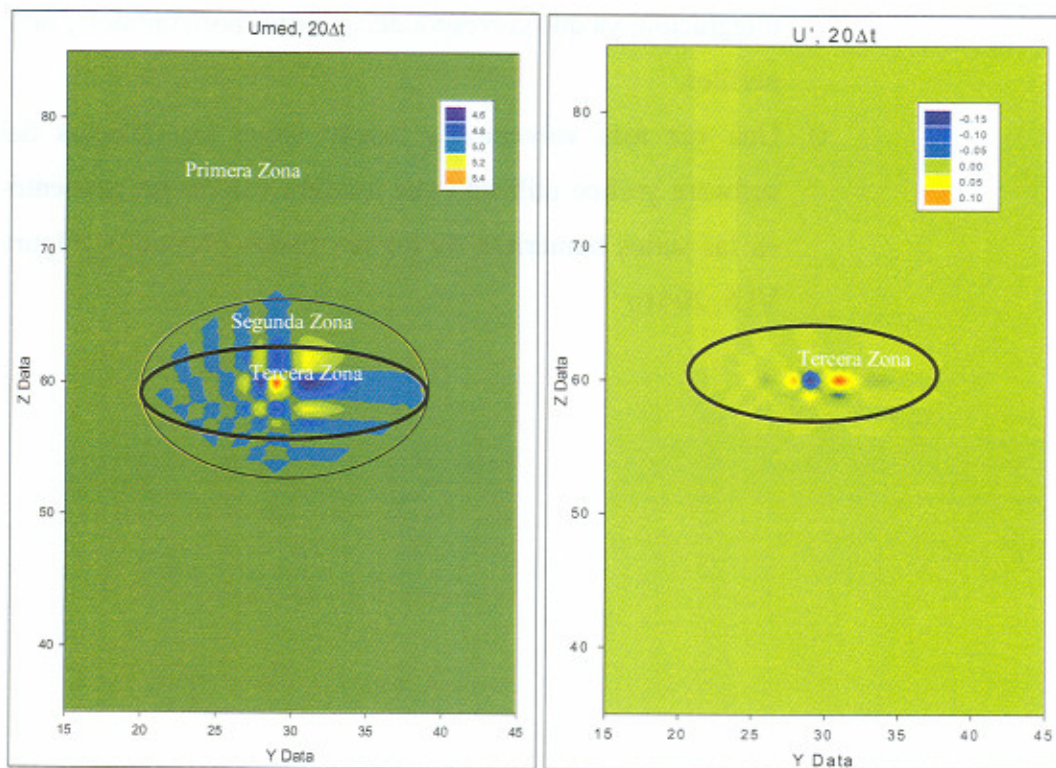


Fig. VI.8- Comparativa entre las componentes U (U_{med}) y u' en el instante $20\Delta t$ de integración en la que se observa que las perturbaciones turbulentas desarrolladas quedan comprendidas en el interior de la llamada *Tercera Zona*, mientras que la ausencia de perturbaciones tiene lugar en la *Primera Zona*, reservando la denominación de *Segunda Zona* a aquella estructura de la malla en la que las perturbaciones se encuentran en un estadio intermedio.

- b) La expansión del efecto sobre la malla de integración para las magnitudes u' y w' no se corresponde exactamente con la presentada por las magnitudes u y w , siendo en este caso la coordenada z la de expansión de las perturbaciones más reducida. Para u y w la zona vertical afectada se encontraba entre las divisiones de malla 53 a 67 mientras que para u' y w' lo hace entre la 57 y la 63. Para las variables θ y θ' sí se corresponden las zonas afectadas por el vórtice (53-67 en ambos casos).
- c) El análisis detallado de estas zonas de influencia diferenciales (Figura VI.8) se corresponde realmente con una subdivisión que origina el modelo tras la aplicación, incluso en los primeros pasos de evolución temporal; a saber: **Primera Zona** (velocidad característica u_{ma}), aquella no afectada por ninguna de las variables del modelo con el desarrollo del vórtice. En ella la velocidad coincide exactamente con la propuesta inicial para cualquier punto no afectado por el vórtice (hay que recordar que la viscosidad considerada es tan pequeña que sus efectos son ignorados frente a otros términos de las ecuaciones a través del propio cálculo) ni por supuesto por los efectos de los bordes verticales de la malla. **Segunda Zona**, la afectada por los efectos del vórtice no sometida aún a las perturbaciones turbulentas desarrolladas asociadas a él, pero que presenta valores numéricos, en todas las componentes de la velocidad, diferentes a la primera zona descrita. Por último, **Tercera Zona** en torno al punto central de la malla, en la que se producen variaciones de las componentes de la velocidad pero con la existencia de perturbaciones turbulentas que podemos considerar como suficientemente desarrolladas.
- d) Esquemáticamente llamando u_{ma} a la velocidad en los puntos de la malla no afectados por el vórtice ni por los bordes, u a la velocidad puntual para cada punto de la malla y \bar{u} (en la

Figura VI.8 $\bar{u} \equiv U_{med}$) a la velocidad media procedente de la aplicación de la descomposición de Reynolds, las zonas, anteriormente descritas, se caracterizan de la siguiente forma:

- | | |
|------------------------|---|
| a. Primera Zona | $u_{ma} = \bar{u} \rightarrow u' = 0$ |
| b. Segunda Zona | $u_{ma} \neq \bar{u} \rightarrow u' = 0$ |
| c. Tercera Zona | $u_{ma} \neq \bar{u} \rightarrow u' \neq 0$ |

- e) Esta figura y la propiedad descrita se reproduce tal cual si se aplica a las componentes v y w .
- f) La extensión horizontal (eje Y) conserva los mismos valores para las dos series de magnitudes en lo que a las divisiones de malla se refiere, concretamente las comprendidas entre 21 y 39.
- g) Las conclusiones puestas de manifiesto en estos párrafos anteriores podrían justificarse ya que en horizontal propusimos componentes de la velocidad de 5 unidades mientras que en la vertical lo fue de la décima parte, por lo que la difusión de los efectos perturbativos para desplazamientos horizontales será más eficaz, como régimen turbulento, que para los verticales. El ensayo realizado, con la intención de apoyar esta última deducción, se ha computado proponiendo velocidades con componentes iguales en las tres coordenadas; aunque no se muestra el resultado informamos que la dispersión fue la misma en todas las direcciones a diferencia del caso que estamos describiendo.
- h) Las Figuras VI.9 a VI.11 para $20\Delta t$ muestran, a diferencia de lo ocurrido en las figuras VI.2 a VI.4, que las perturbaciones, en relación a su distribución espacial, no presentan acoplamientos observables; destacando sobremanera la ausencia de relación entre las variables w' y θ' , lo cual no sería contradictorio ya que desde el primer instante se ha

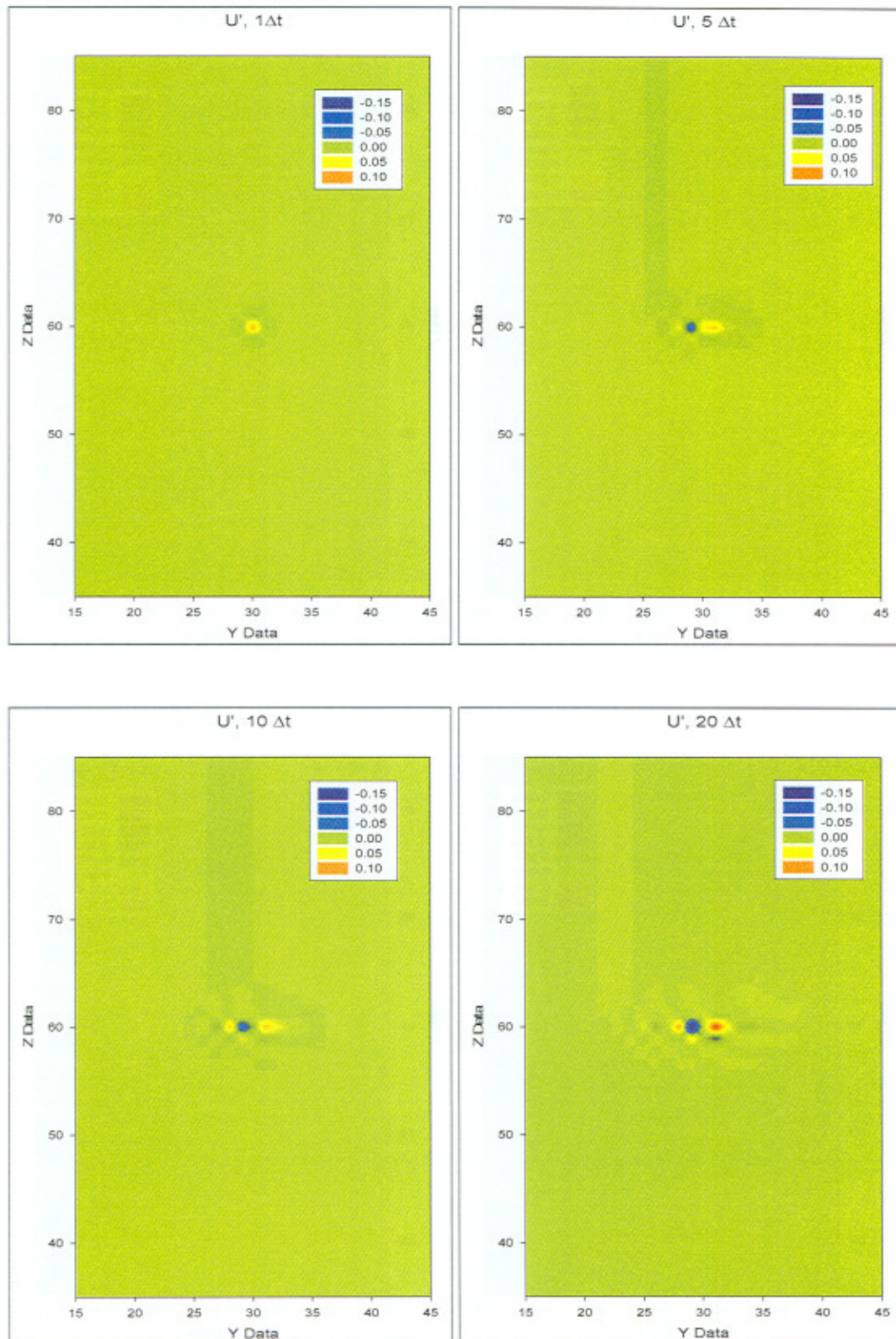


Fig. VI.9- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente u' desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

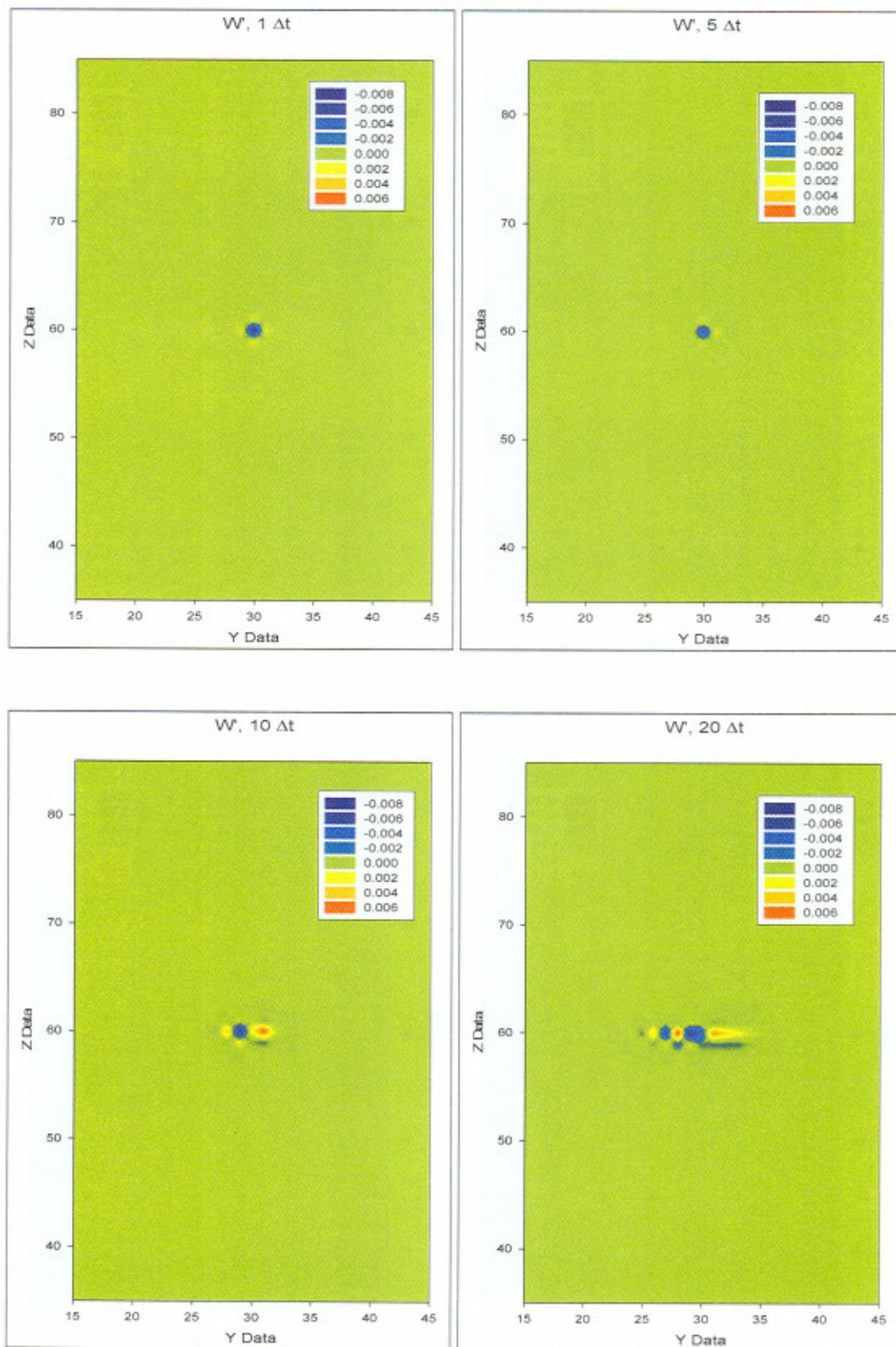


Fig. VI.10- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente w' desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2.

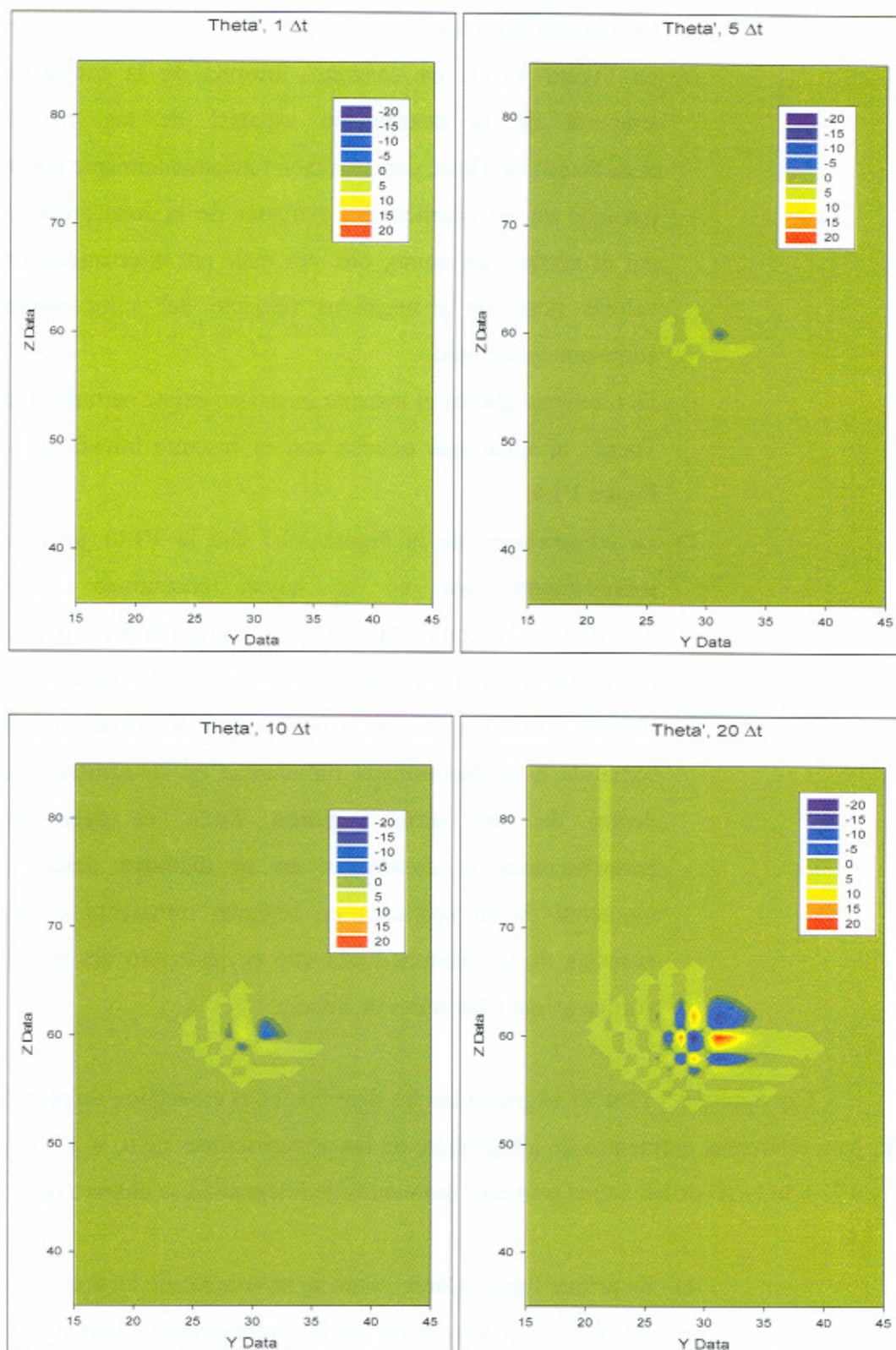


Fig. VI.11- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la temperatura potencial (θ') desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

impuesto a las perturbaciones un comportamiento fuertemente aleatorio.

- i) La Figura VI.11, en concreto, informa de la evolución temporal de la distribución espacial de los valores perturbados de Theta, caracterizada fundamentalmente por la igualdad en las coordenadas extremas de la zona afectada por el vórtice, así como, una vez más, por alternancias de valores positivos y negativos respecto del valor medio correspondiente nulo.
- j) Es reseñable que en el instante inicial no existe perturbación Theta', al igual que ocurría con el instante inicial de la Figura VI.4.
- k) La comparación de la Figura VI.7 con la VI.11 justifica sobradamente que no se hayan encontrado zonas diferenciales de comportamiento, en lo que a la perturbación turbulenta se refiere, a diferencia de lo ocurrido con u' y w' (Figura VI.8), con lo que la temperatura potencial no está sometida a la denominada turbulencia no desarrollada, o dentro de este texto **Segunda Zona**, es decir las perturbaciones se desarrollan en su totalidad desde el momento de su aparición en régimen turbulento o hay ausencia de las mismas hasta que el desarrollo del propio vórtice afecte a las zonas de interés.

Las figuras VI.12 a VI.14 presentan las distribuciones espaciales, en planos XY, para diferentes momentos de integración, de las perturbaciones de u , w y θ (u' , w' y θ'). A lo largo de los veinte primeros momentos de integración se observa que:

- a) En primer lugar aclarar, como se ha comentado en anteriores ocasiones, que los errores del software gráfico usado en este estudio generan bandas anómalas en algunas zonas de las figuras.

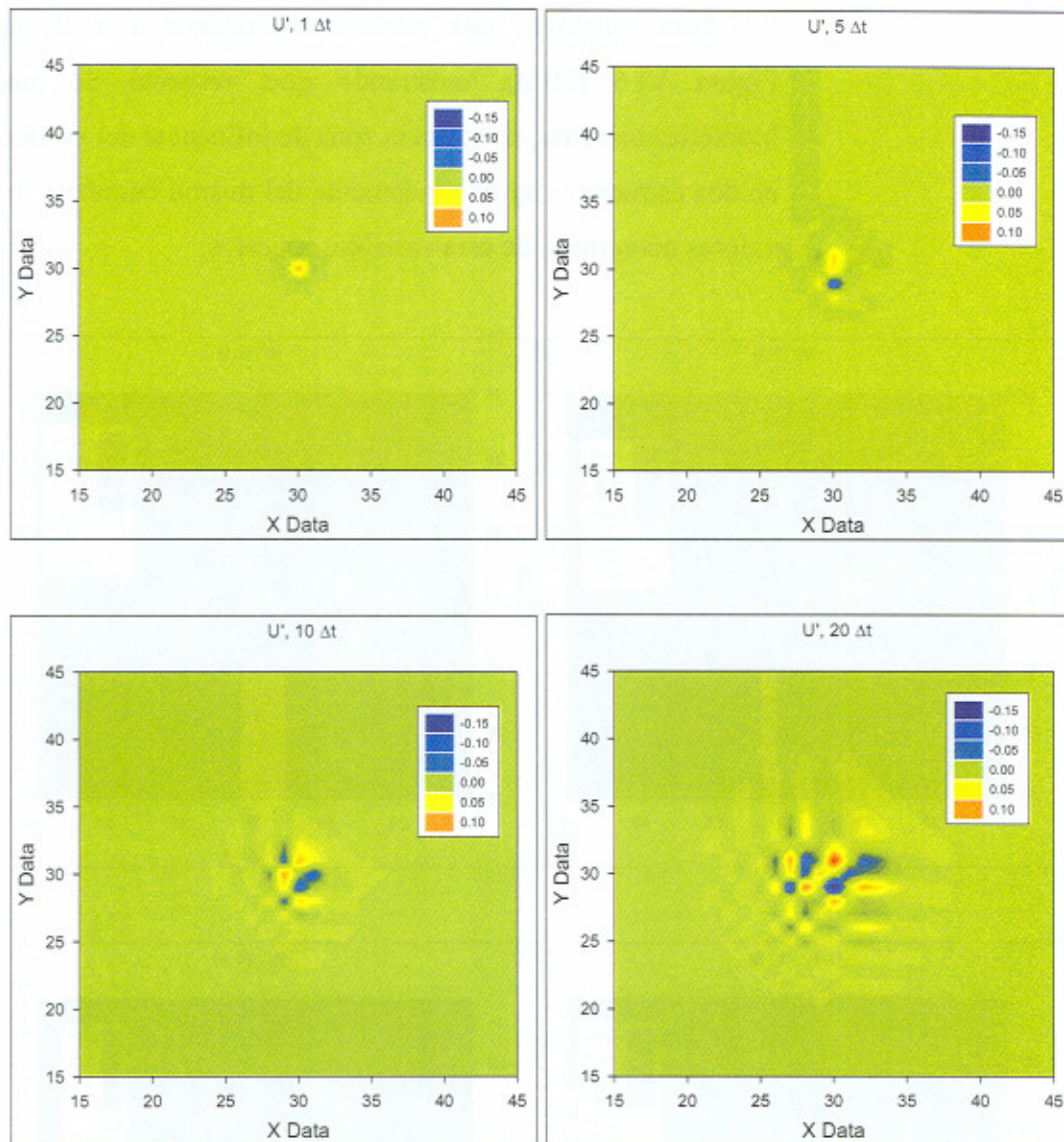


Fig. VI.12- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la componente u de la velocidad (u') desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

- b) La zona de influencia según avanzan los intervalos de integración, tanto para u' como para w' afectan a un área de influencia cuyo tamaño en primera aproximación es creciente y que podría ser idéntico tanto en el eje x como en el y , lo cual era previsible dado que las velocidades impuestas para ambas coordenadas eran 5 y 5, tal y como se ha ido explicando y utilizando en anteriores apartados.

- c) A diferencia del comportamiento de las componentes u' y w' , θ' mantiene una estructura semejante a la de la Figura VI.6 ($20\Delta t$), mostrando que, respecto de una hipotética bisectriz, dividiría la zona de influencia del vórtice en dos estructuras aproximadamente del mismo tamaño y de valores numéricos, de esta variable, opuestos.

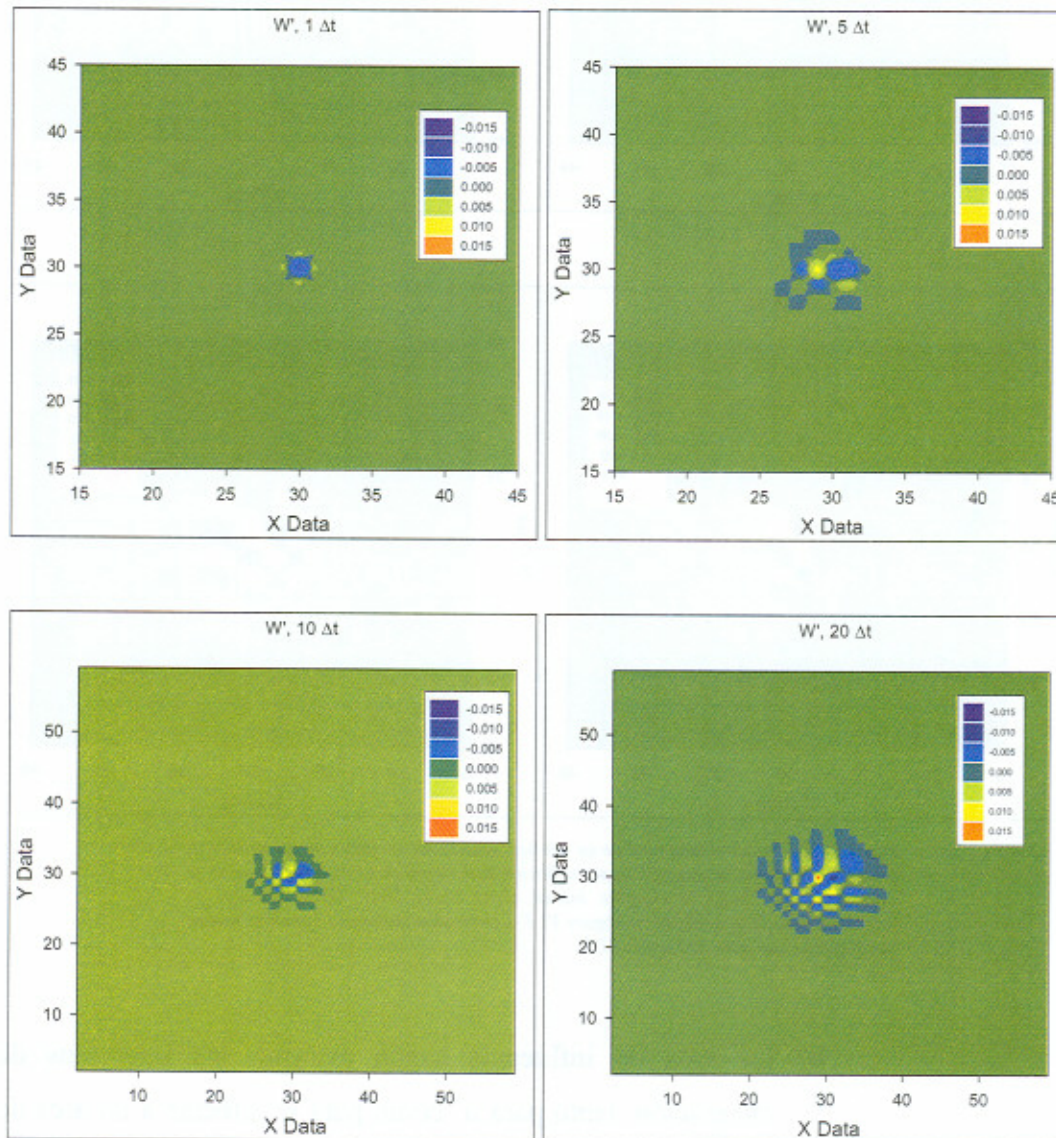


Fig. VI.13- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la componente w de la velocidad (w') desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2.

- d) Es de resaltar, asimismo, la ausencia de acoplamiento entre las perturbaciones de la componente vertical de la velocidad (w') y las de la temperatura potencial (θ').

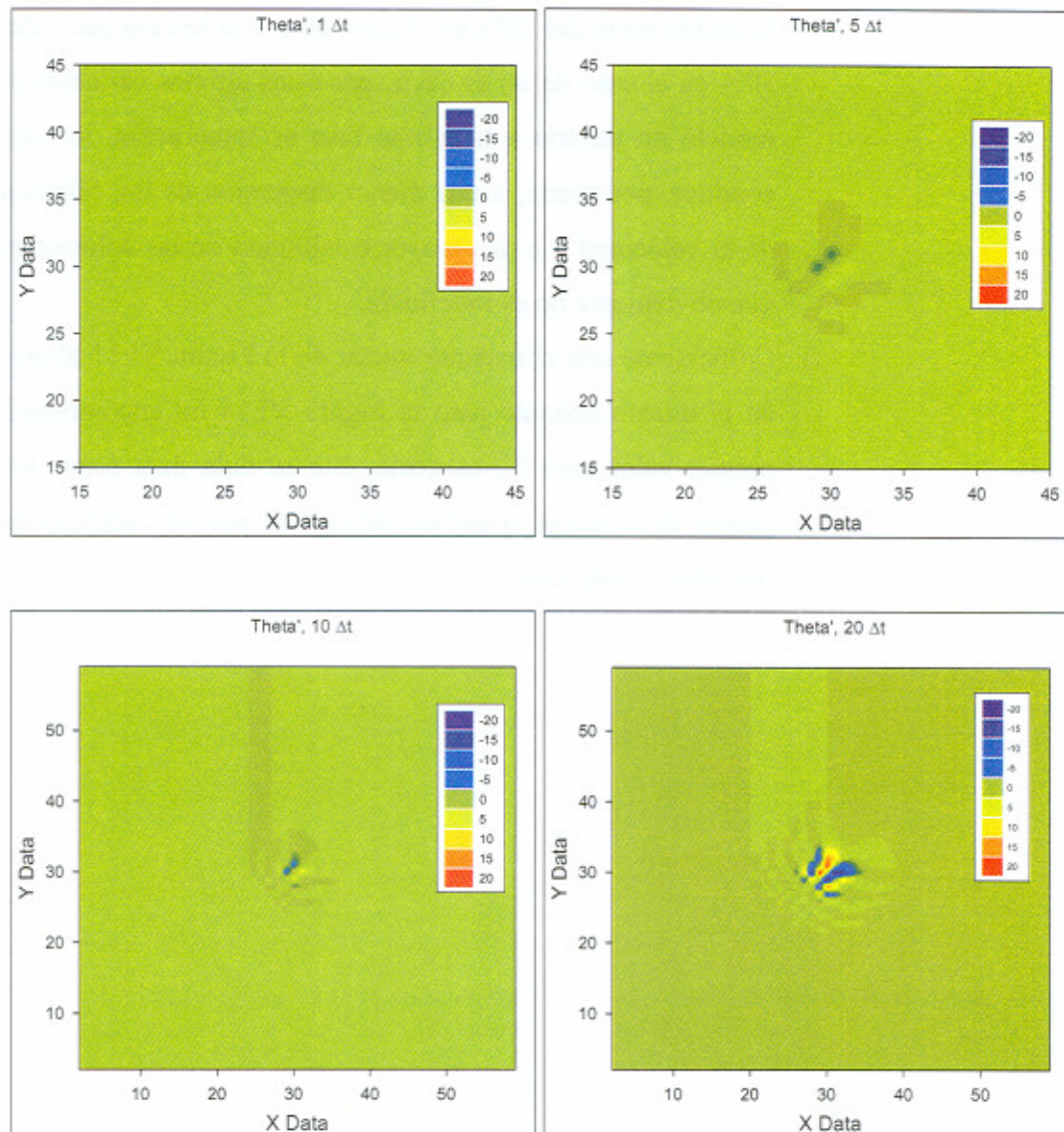


Fig. VI.14- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la temperatura potencial (θ') desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

- e) A la vista de los valores cuantitativos de las escalas incorporadas en estas figuras se observa claramente que la variable que más rápidamente crece, en porcentaje, consiguiendo con ello que finalice el segundo estadio de integración dando paso a la última fase propuesta por el modelo, es precisamente la variable θ' . Alcanza en el momento $20\Delta t$ (muy cercano al de salto $22\Delta t$) valores de ± 20 unidades (cercano al 10% del valor tomado), mientras

que para las variables de la velocidad mostradas se alcanzan la quinta parte del 10% en el caso de u y la tercera parte del 10% en el caso de w ; es decir, por estas últimas variables el modelo no pasaría a la última fase de integración, lo cual conduce, por suerte, a una menor dispersión de los cálculos de la velocidad y a una mayor estabilidad de las soluciones que obviamente no es indefinida.

- f) Coincidente con el instante inicial de la Figura VI.11 ahora, en el mismo instante para la Figura VI.14 no encontramos ningún valor para θ' , es decir, ésta es nula para todos los puntos de la malla, como era de esperar por las condiciones iniciales de este caso.

VI.2.4 COMPONENTES PUNTUALES DEL ROTACIONAL. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

Las imágenes que se mostrarán en las figuras que aparecen a continuación corresponden ya a comportamientos de la propia vorticidad que, como tal vector, posee tres componentes sobre cada uno de los ejes coordenados, es decir, Rot_x , Rot_y y Rot_z . La intención fundamental de la memoria, lógicamente, es mostrar las evoluciones del vector $\nabla \times \mathbf{v}$, obtenido tras la integración del modelo mediante la discretización de las derivadas parciales que definen dicho vector.

Asimismo, en el siguiente epígrafe aparecerán las formas perturbadas de la vorticidad ($\nabla \times \mathbf{v}'$), con lo cual tendremos una información más completa de los efectos producidos por el modelo propuesto.

Las Figuras VI.15 a VI.17 corresponden a las evoluciones temporales, en un plano vertical ubicado en la coordenada x del vórtice inicial, de las componentes del vector vorticidad. Se muestran, al igual que en los análisis anteriores, los momentos de integración 1, 5, 10 y $20\Delta t$, que corresponden a la segunda fase de integración (para recordarlo, en la primera tan sólo se establecían las condiciones iniciales y de contorno). En este tipo de figuras se ha vuelto a tomar la escala del último momento de integración con el objetivo de poder evaluar todas las imágenes y hacerlas comparables, aún perdiendo detalle en las anteriores.

A diferencia de los valores de los campos de la velocidad que eran del orden de 5, 5, 0'5 estas figuras muestran que el orden de magnitud es de 0'1, 0'1 y 0'1 para las zonas que presentan mayores valores de vorticidad y 0, 0 y 0 para las no afectadas por el vórtice. La cuantificación comparable entre las tres componentes de la vorticidad frente a la no comparable de las componentes de la velocidad no debe ser sorpresiva ya que para la primera estamos hablando de las derivadas de las componentes de la velocidad frente a las de la segunda que son ellas mismas.

- a) En primer lugar destacar, en la Figura VI.15, el aumento del tamaño de la zona de la malla afectada por la variación de los campos de velocidad y por la presencia de la componente x de la vorticidad.

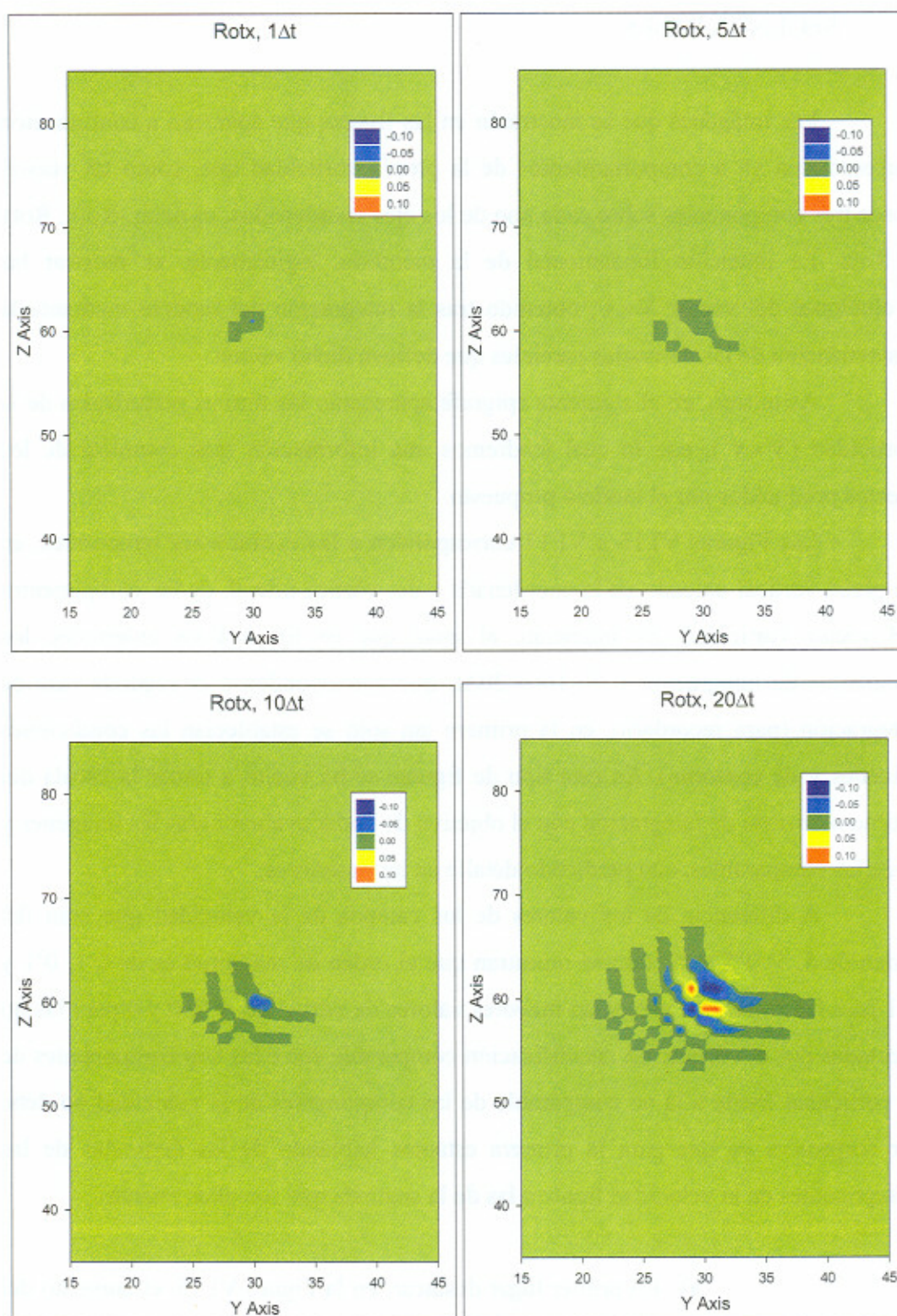


Fig. VI.15- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente x de la vorticidad (Rotx) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes verticales en planos YZ.

- b) Los tamaños de malla ocupados alcanzan en el eje horizontal, para $20\Delta t$, las zonas de la malla comprendidas entre 22 y 38, frente a los tamaños de malla en el eje vertical, comprendidos entre 54 y 66. Estas elongaciones estaban perfectamente justificadas para el caso de las componentes de la velocidad por la dinámica del problema, recordando que la componente z de la velocidad era del orden de diez veces menor que las restantes componentes.
- c) Es notable, asimismo, la observación de elongación horizontal de los efectos del vórtice en esta componente.
- d) Pese a que las componentes del vector vorticidad se obtienen a través de las derivadas primeras cruzadas de la velocidad, también encontramos el comportamiento de elongación diferencial en ellas. Lo que implica que la diferencia de las componentes de la velocidad afecta no sólo a sus propias evoluciones sino a las de un operador en derivadas primeras que, en principio, no tendría porque tener un comportamiento comparable ni similar.
- e) El valor lejos de los elementos de perturbación (vórtice y bordes) ha de ser nulo ya que en esa zona no se permitían, como condiciones impuestas al problema, variaciones en el vector velocidad, con la intención de observar el único vórtice impuesto. Si hubiésemos planteado el caso diferente en el que variasen dichas velocidades para cualquier punto de la malla, y no sólo en el vórtice, tan sólo encontraríamos múltiples dificultades a la hora de intentar extraer información únicamente del vórtice.
- f) Una vez más se observan fenómenos de alternancia de valores y menores que cero y la ausencia de simetría o de perturbaciones armónicas.

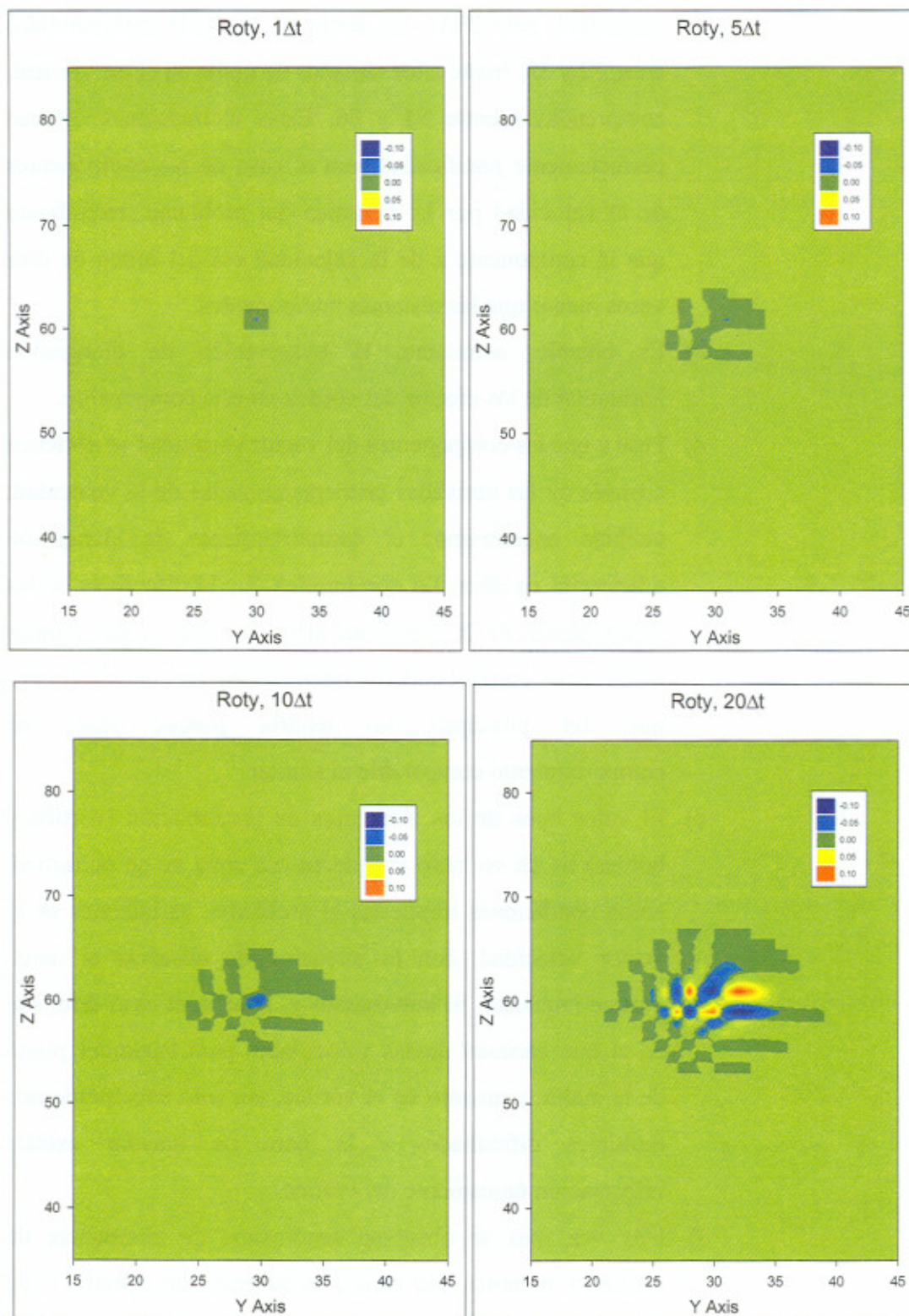


Fig. VI.16- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente y de la vorticidad (Roty) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes verticales en planos YZ.

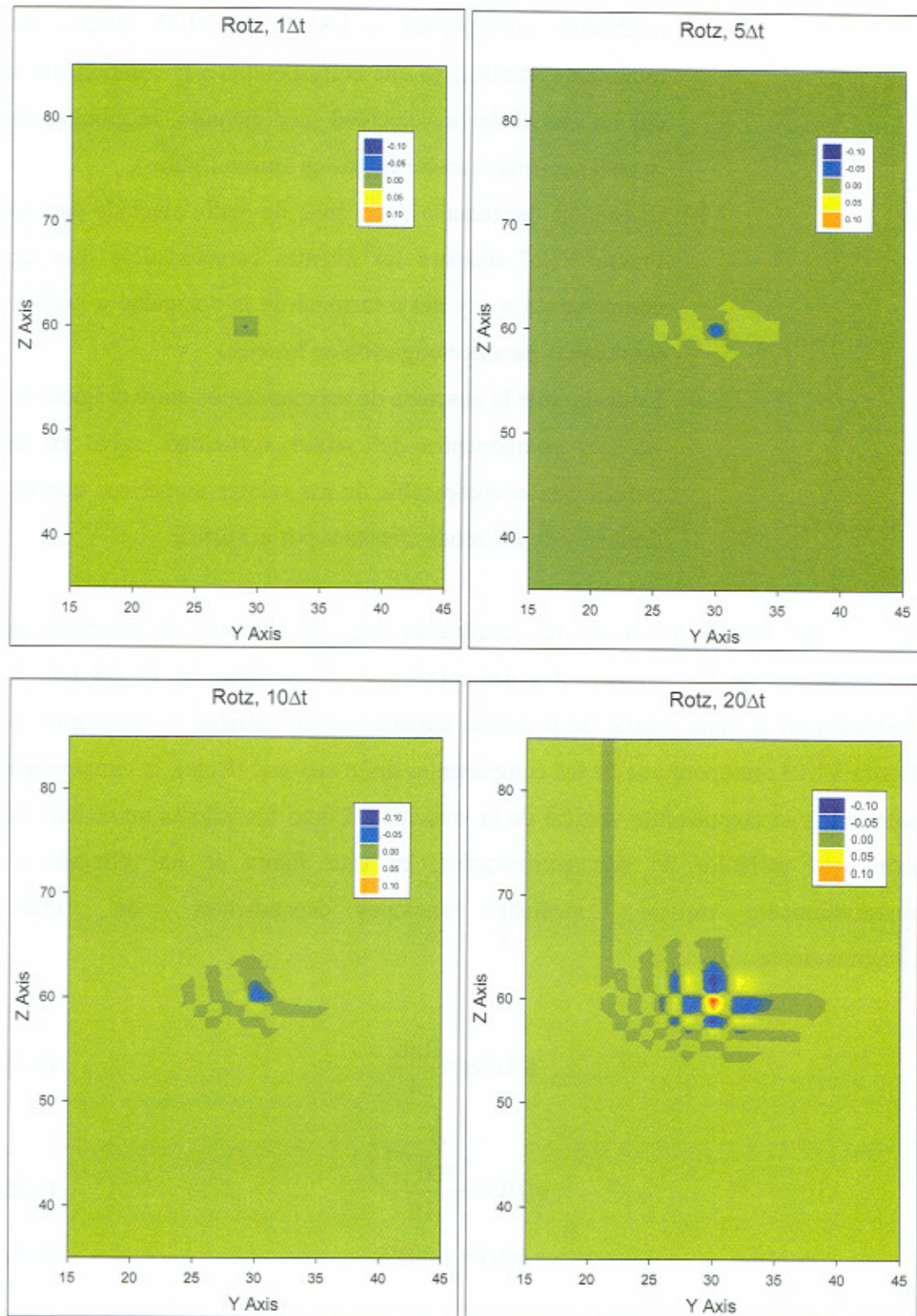


Fig. VI.17- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente z de la vorticidad ($Rotz$) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Cortes verticales en planos YZ.

- g) En la Figura VI.16 se observa una evolución y desarrollo totalmente comparables a las de la VI.15 aunque no totalmente idéntica, ya que corresponden a la componente y del rotacional de la velocidad (por ejemplo, la elongación tiene las mismas características en ambas figuras).
- h) El análisis del tamaño de la zona de malla afectada para la Figura VI.17 muestra las mismas características que las componentes x e y del rotacional de la velocidad e incluso las mismas para la elongación en los ejes.
- i) Es destacable la ausencia de acoplamientos entre ninguna de las tres componentes del vector vorticidad, salvo en la cuantificación comparable de los valores numéricos que las definen y de las zonas afectadas por el vórtice.

La Figura VI.18 se ha construido con el objetivo de observar la cuantificación de las componentes del rotacional (comentadas en el epígrafe i) evaluadas en la zona central de la malla, tomando como variable z. Asimismo, la Figura VI.19 incorpora una de las componentes del rotacional (Rotz), la temperatura potencial y la componente vertical de la velocidad. Como los valores numéricos de estas tres variables no son comparables, en esta figura se ha reflejado el comportamiento vertical mediante funciones dependientes de ellas. Concretamente:

$$f(\text{Rotz}) = \frac{\text{Rotz}}{4} \quad (6.1)$$

$$g(\theta) = \frac{\left(\frac{\theta}{300} - 1\right)}{10} \quad (6.2)$$

$$h(w) = w - 0.5 \quad (6.3)$$

- j) La Figura VI.18 muestra un relativo acoplamiento entre las tres componentes del rotacional, sobre todo en los niveles más bajos del corte vertical de la figura. Asimismo se observa también una alternancia de valores positivos y

negativos (ya indicada en otros epígrafes) que no presentan oscilación armónica. Hay, pues, una determinada ausencia de simetría, como era previsible.

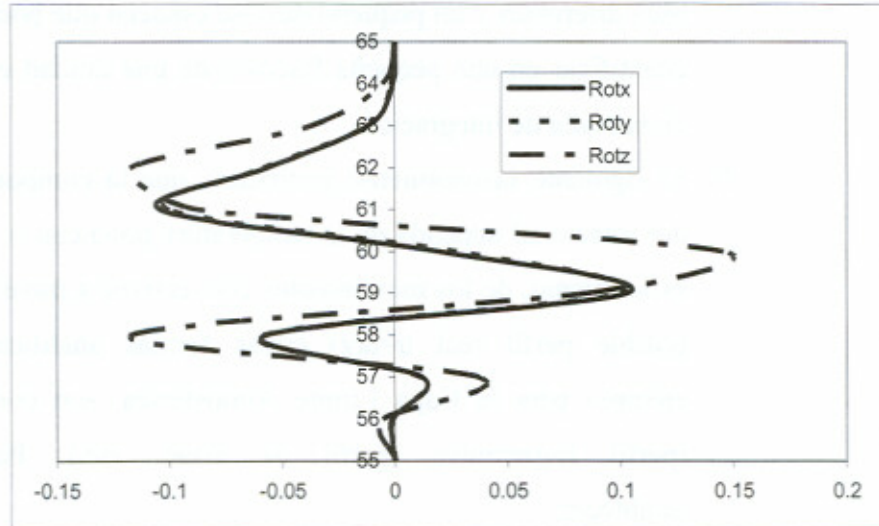


Fig. VI.18- Comparación de las tres componentes de la vorticidad. Se observa un comportamiento extremadamente similar entre las dos primeras y muy parecido a la tercera. Corte vertical en los puntos $(30, 30, z)$; $55 \leq z \leq 65$. Momento $20\Delta t$.

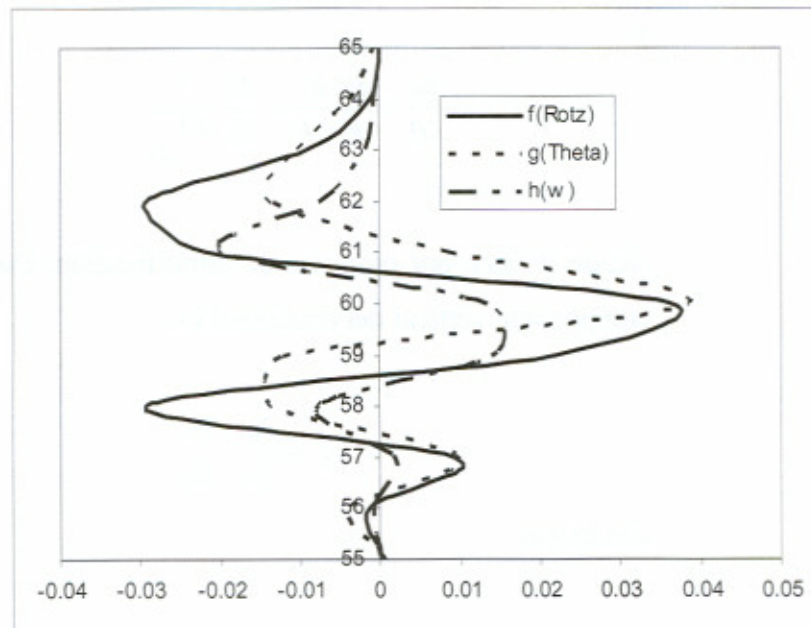


Fig. VI.19- Comparación de magnitudes dependientes de la componente z de la velocidad ($h(w)$), del rotacional de la velocidad ($f(Rotz)$) y de la temperatura potencial ($h(Theta)$). Se observa un acoplamiento entre los tres comportamientos salvo un pequeño desfase. Corte vertical en los puntos $(30, 30, z)$; $55 \leq z \leq 65$. Momento $20\Delta t$.

- k) Sin embargo, en la Figura VI.19 la superposición de perfiles verticales, ubicados en las coordenadas $x=30$ $y=30$, de

magnitudes dependientes de la componente vertical de la velocidad (Figura VI.3), la componente z del rotacional (Figura VI.17) y la temperatura potencial (Figura VI.4) muestra un relativo acoplamiento aunque con magnitudes muy diferentes y un pequeño desfase espacial que podríamos cuantificar en una pequeña fracción de una unidad espacial de la malla de integración.

- 1) El siguiente razonamiento justificaría que la componente z del rotacional dependa de la temperatura potencial o, lo que es lo mismo, de los movimientos convectivos a través de un posible perfil real $u=u(z)$ cuyas formas analíticas, por ejemplo para la Capa Límite Atmosférica, son conocidas (perfil logarítmico, perfil de Frost, etc.). Podemos establecer:

$$\frac{du}{dz} \neq 0 \quad (6.4)$$

y

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{d\theta} = \frac{du}{dz} \frac{1}{d\theta/dz} \quad (6.5)$$

siendo $\theta=\theta(z)$, por procesos de estratificación. Dado que la componente vertical del rotacional es:

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.6)$$

con lo que:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (6.7)$$

que, obviamente, salvo en el caso de igualdad de los dos sumandos de la última expresión, sería distinto de cero, es decir, la tercera componente del rotacional de la velocidad

depende de la temperatura potencial. En concreto, esta dependencia es la que justifica el grado de acoplamiento observado en la Figura VI.19.

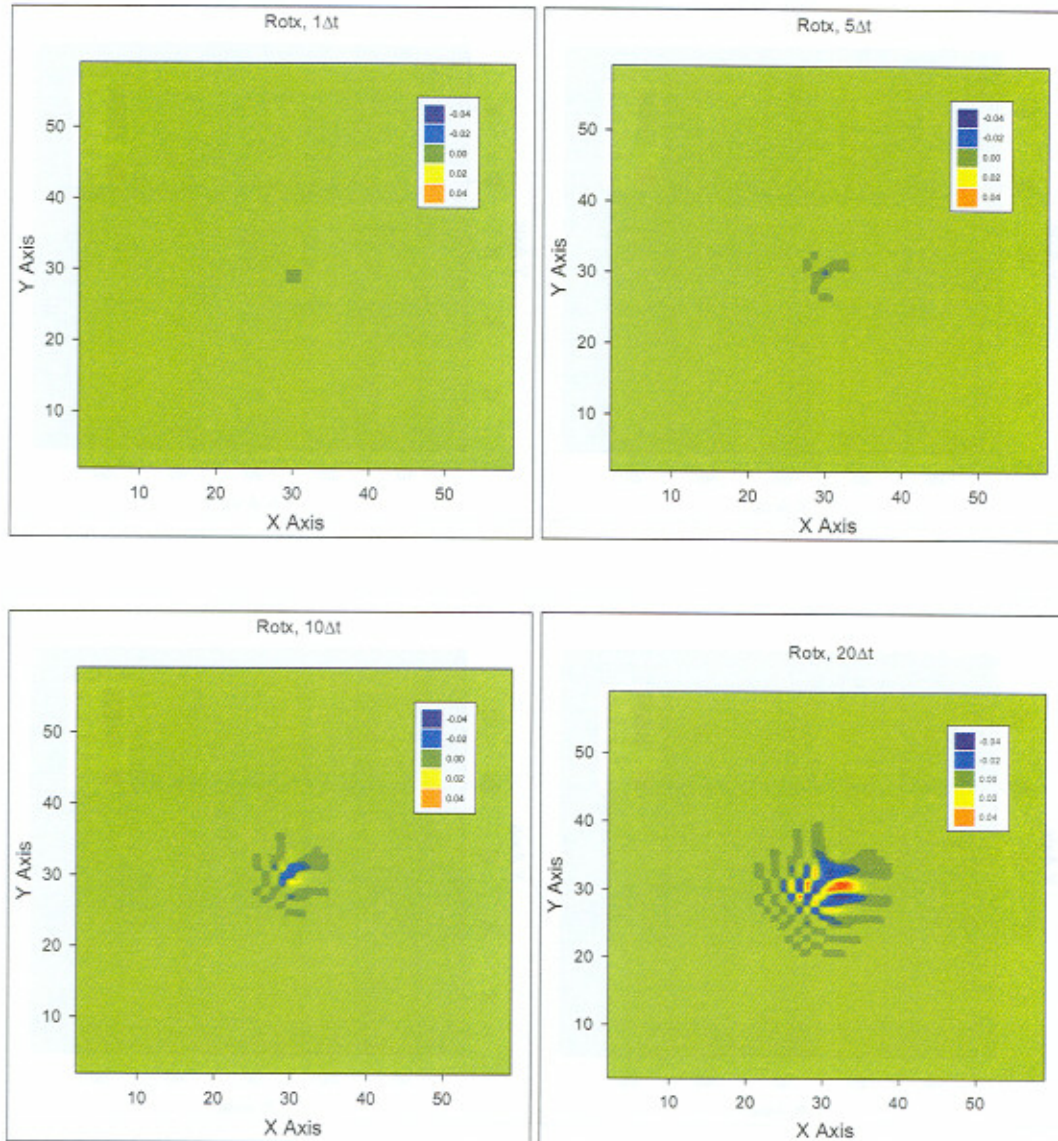


Fig. VI.20- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente x de la vorticidad ($Rotx$) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes horizontales en planos XY .

Las Figuras VI.20 a VI.22 corresponden a las evoluciones temporales, en un plano horizontal ubicado en la coordenada z del vórtice inicial, de las componentes del vector vorticidad. Se muestran, al igual que en los análisis anteriores, los momentos de integración 1, 5, 10 y $20\Delta t$, que corresponden a la primera y segunda fases de integración. De nuevo se mantienen para todas ellas

las escalas correspondientes a los últimos instantes de integración. Se observa que:

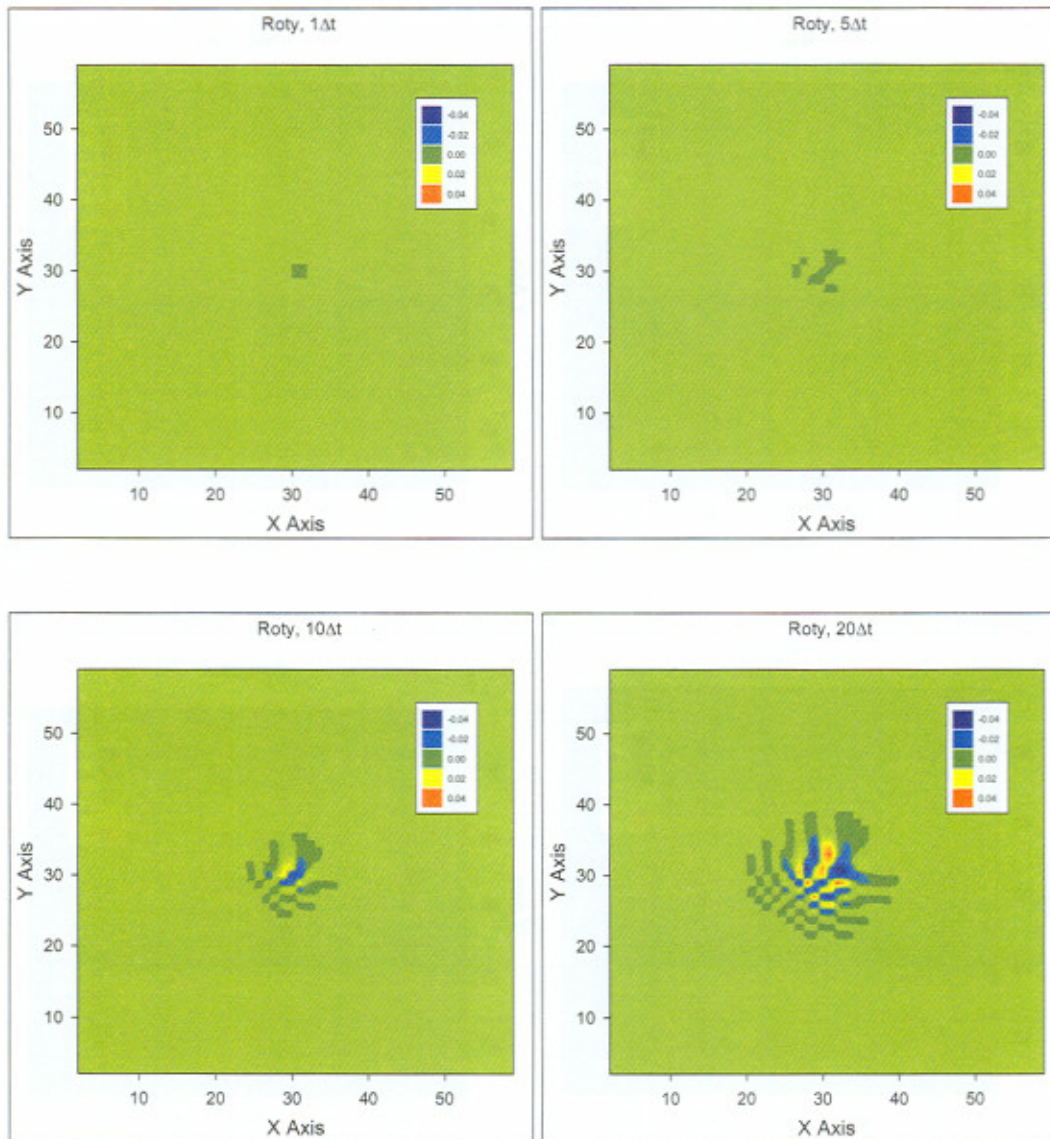


Fig. VI.21- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente y de la vorticidad (Roty) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes horizontales en planos XY.

- m) Las zonas de influencia del vórtice en las tres figuras son del mismo tamaño.
- n) El aspecto de la zona de influencia para la tercera componente es diferente del que observamos para las componentes primera y segunda.

- o) Sin embargo, un análisis más detallado (Figura VI.23) para la comparación de las componentes primera y segunda muestra un comportamiento opuesto de ellas según se observa en el corte horizontal para los puntos $(x, 30, 60)$ siendo $x \in [22, 38]$.

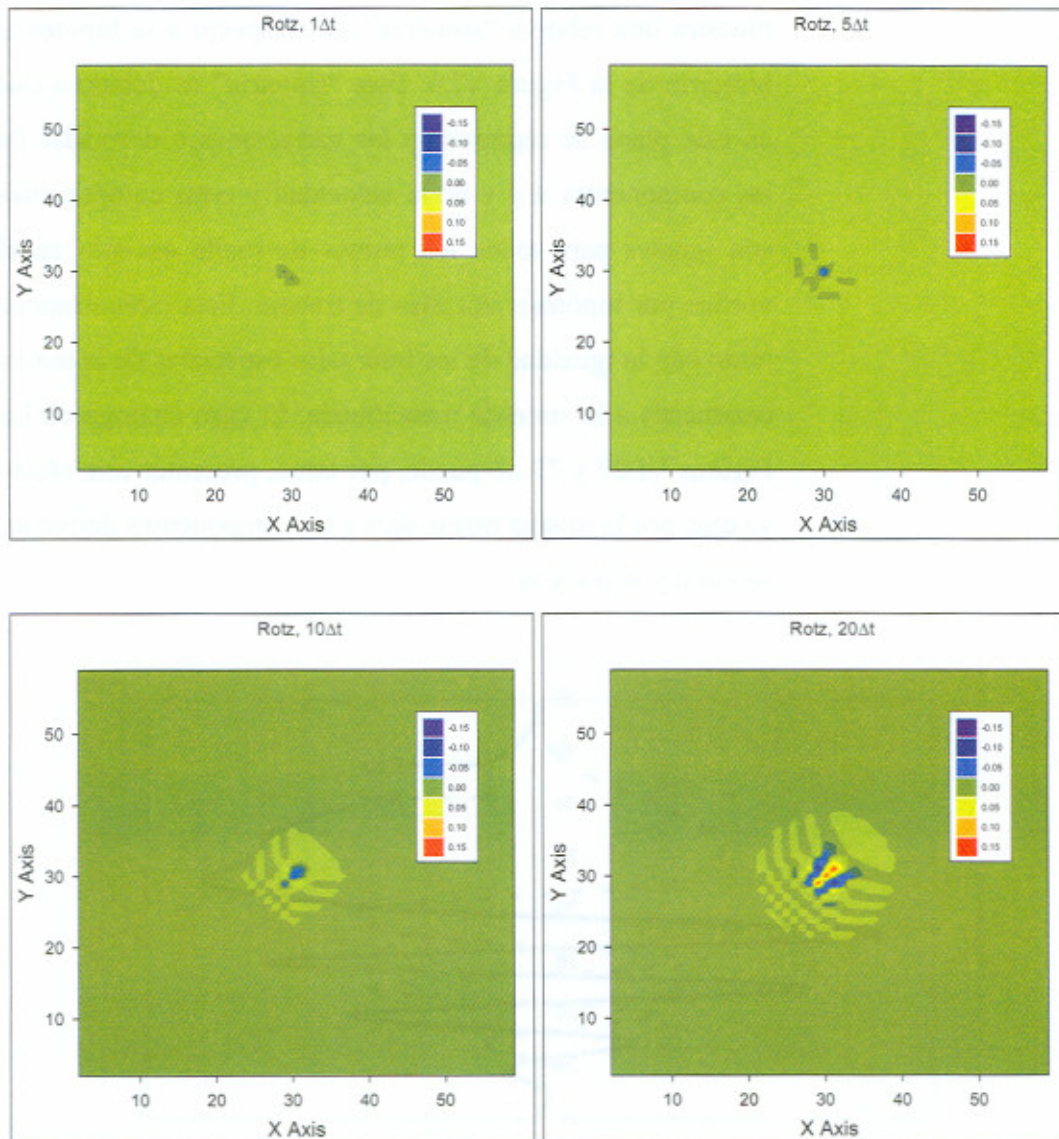


Fig. VI.22- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la componente z de la vorticidad (Rotz) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes horizontales en planos XY .

- p) La cuantificación de los mayores valores en el caso de la tercera componente de la vorticidad es del orden de cuatro veces las correspondientes a la primera y segunda componentes.

- q) Al igual que en todas las representaciones obtenidas hasta ahora, de nuevo estas figuras muestran una alternancia de valores mayores y menores que un valor dado (lógicamente 0) y carecen de simetría que pudiera permitirnos asociar estas oscilaciones a efectos armónicos.
- r) La imagen correspondiente a la tercera componente en $20\Delta t$ muestra una relativa “simetría” con respecto a la hipotética bisectriz de la Figura VI.6. Esta “simetría” es debida a que en este plano se representan las variaciones o derivadas de las componentes u y v de la velocidad y estas componentes son iguales para todos los puntos de malla excepto en el vórtice por hipótesis iniciales de trabajo. Esta circunstancia, junto con la igualdad de los intervalos espaciales de la malla, conduciría a la simetría mencionada. El caso análogo en las Figuras VI.20 y 21 no puede, por tanto, presentar este efecto ya que, por la misma razón, ahora las componentes derivadas serían u y w o v y w .

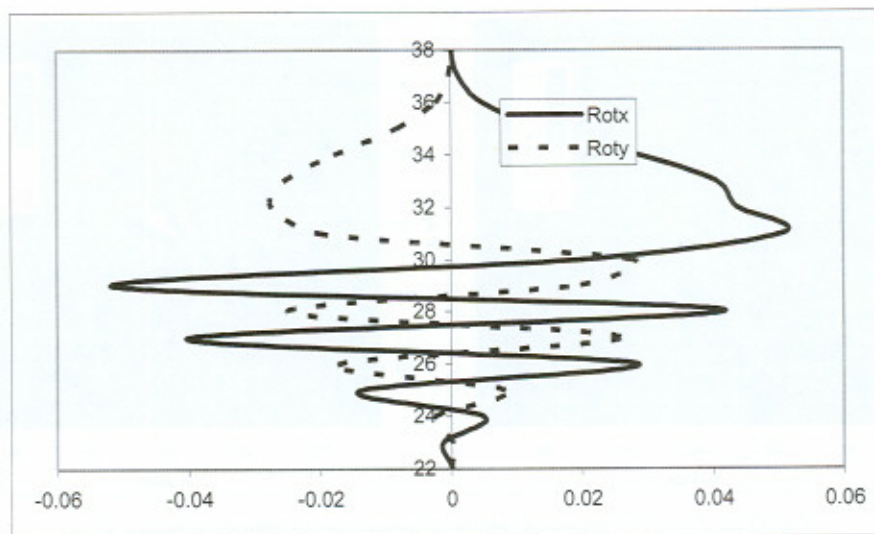


Fig. VI.23- Comparación de las dos primeras componentes del rotacional de la velocidad. Se observa un acoplamiento en oposición entre ellas. Corte horizontal en los puntos $(x, 30, 60)$; $22 \leq x \leq 38$.

VI.2.5 PERTURBACIONES TURBULENTAS DEL ROTACIONAL. PRIMERA Y SEGUNDA FASE.

Las Figuras VI.24 a VI.26 corresponden a las evoluciones temporales, en un plano vertical ubicado en la coordenada x del vórtice inicial, de las componentes de la perturbación turbulenta del vector vorticidad. De nuevo se mantienen para todas ellas las escalas correspondientes a los últimos instantes de integración. Se observa que:

- a) Las zonas de influencia del vórtice en las tres figuras son del mismo tamaño.
- b) La cuantificación de las perturbaciones para los mayores valores son, en orden creciente, primera, segunda y tercera componentes (0.01, 0.02 y 0.06).
- c) Las zonas afectadas por la perturbación del campo de vorticidades muestran elongaciones a lo largo del eje y , siendo las zonas realmente las que se encuentran entre los intervalos de la malla 23-36 para el eje y y 57-63 para el eje z (todo ello referido a la imagen correspondiente a $20\Delta t$ para las tres componentes).
- d) La comparación relativa entre las Figuras VI.15-17 y VI.24-26 muestra que no afectan a las mismas zonas el rotacional de la velocidad y sus valores perturbados mediante la turbulencia. De manera que, usando el valor medio de las componentes de la vorticidad, al igual que con las componentes de la velocidad (Figura VI.8), podríamos distinguir tres zonas de influencia: **Primera Zona**, región de la malla no afectada por la vorticidad, **Segunda Zona**, vorticidad en transición y **Tercera Zona** aquella región afectada por la vorticidad desarrollada (Figura VI.27). Esta propiedad es extensible a las tres componentes de la vorticidad, aunque en la figura correspondiente sólo se muestra el efecto para la componente x .

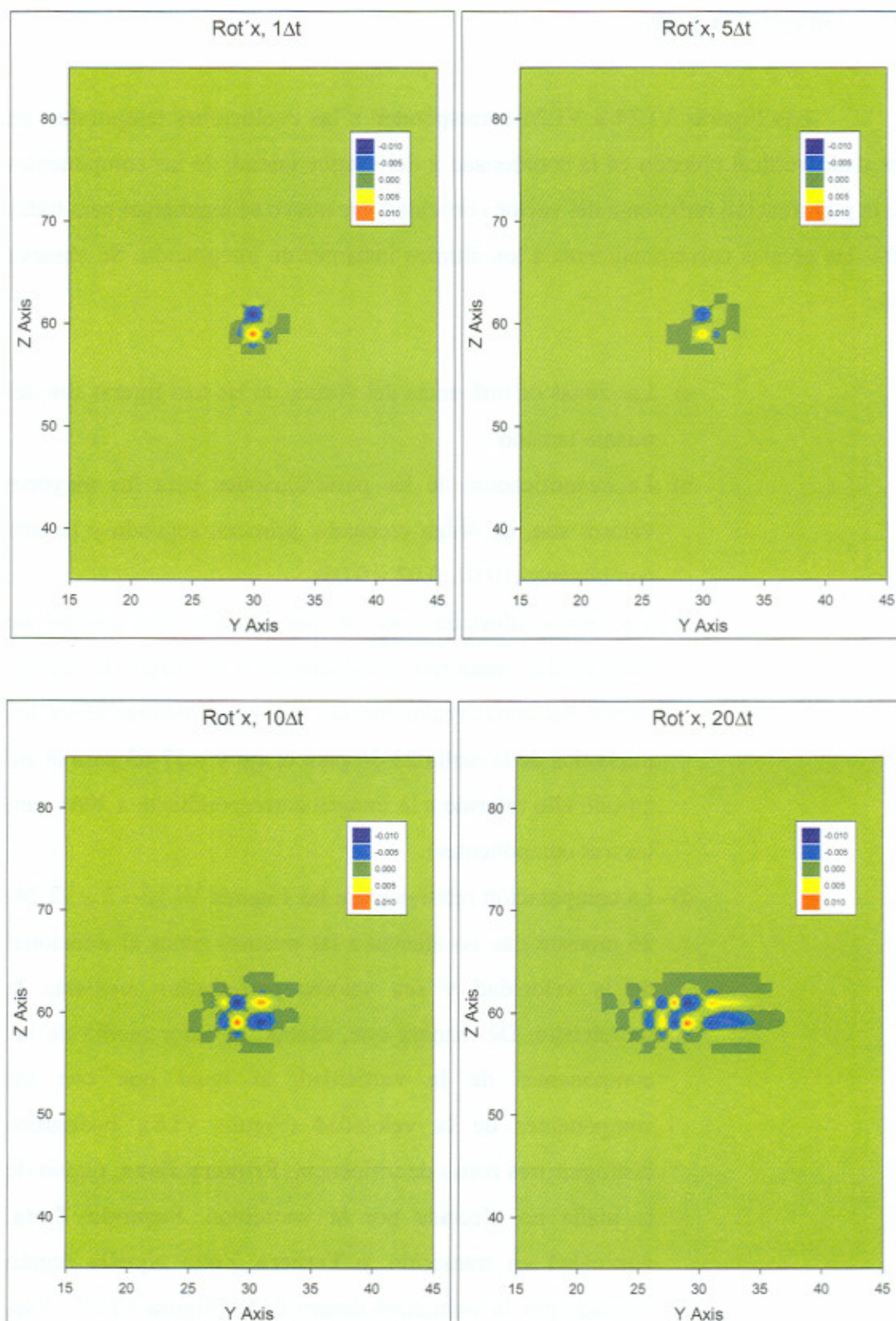


Fig. VI.24- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la componente x de la vorticidad ($Rot'x$) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes verticales en planos YZ.

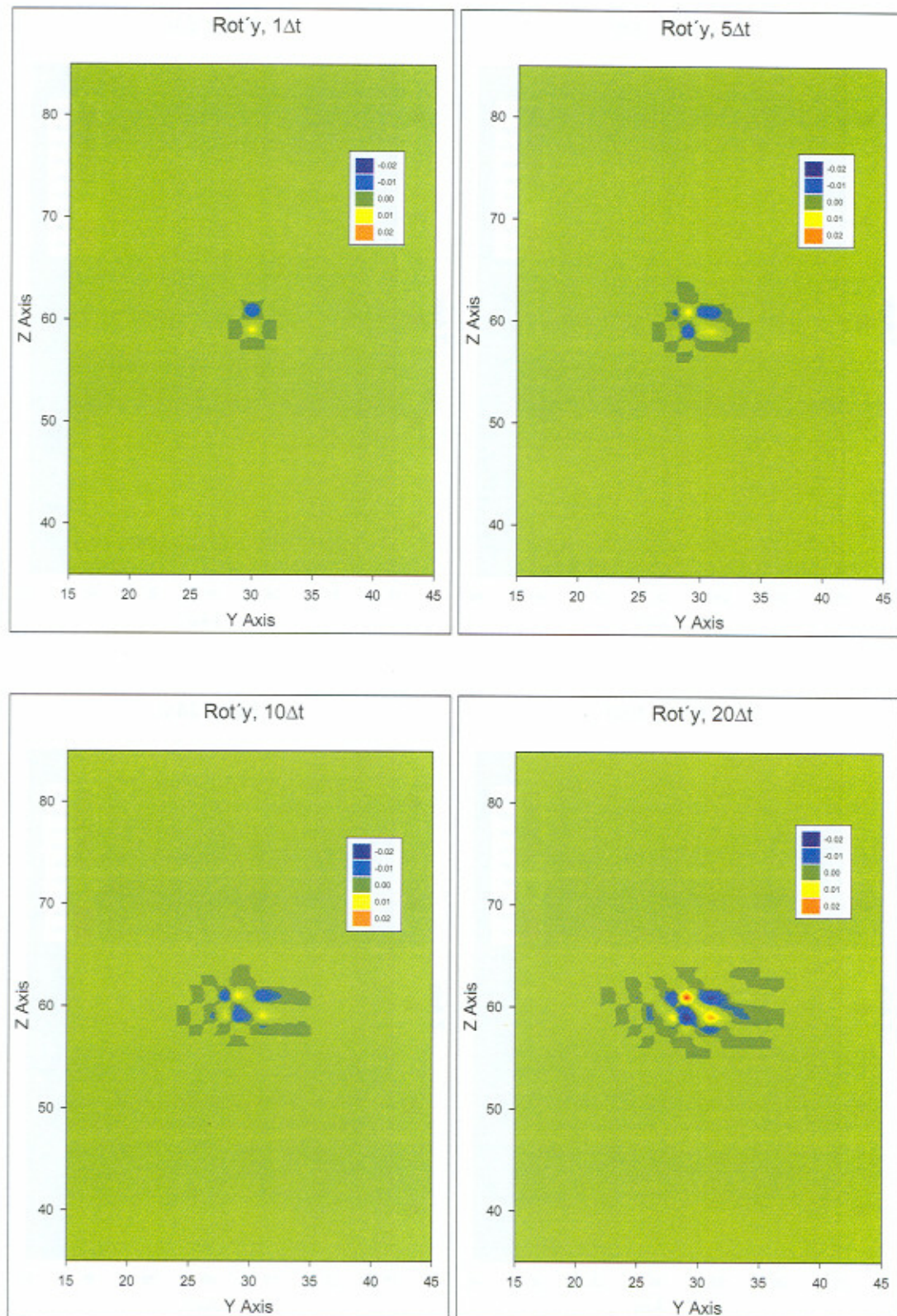


Fig. VI.25- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la componente y de la vorticidad ($Rot'y$) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes verticales en planos YZ.

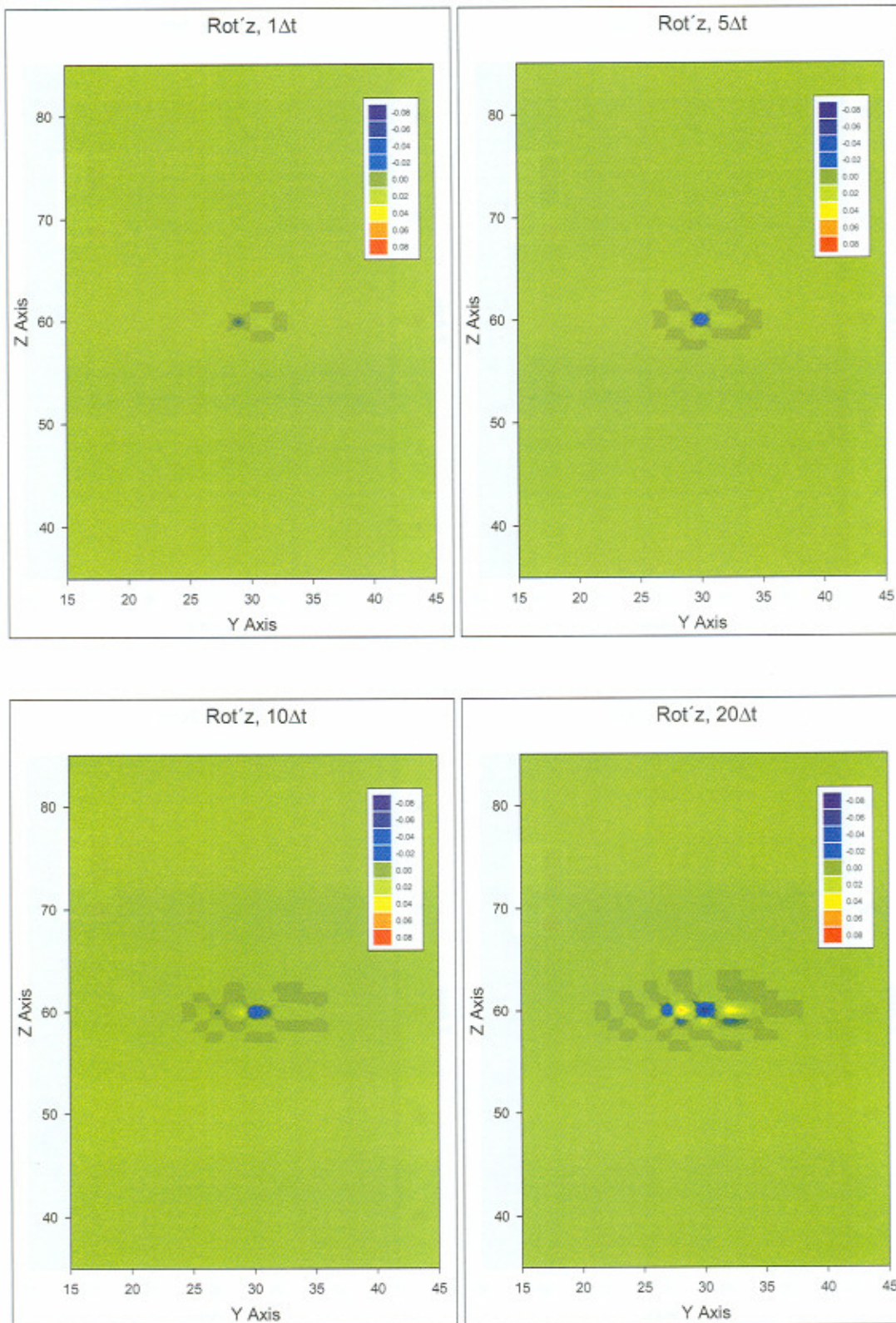


Fig. VI.26- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la componente z de la vorticidad ($Rot'z$) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes verticales en planos YZ.

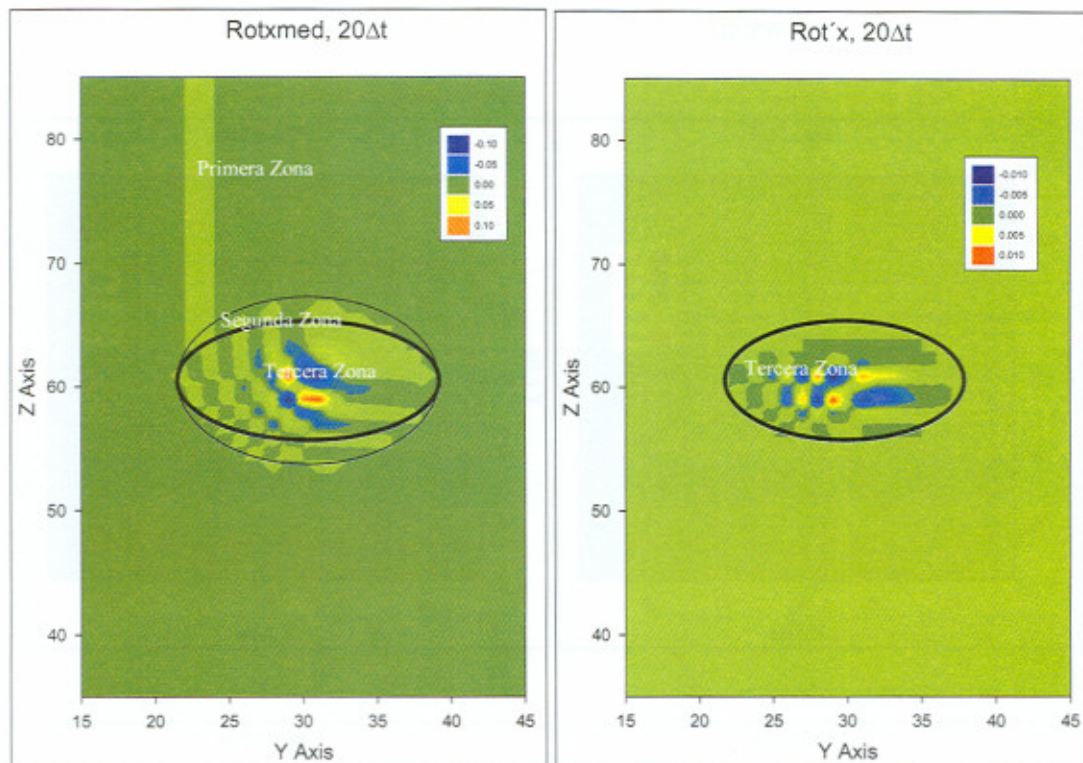


Fig. VI.27- Comparativa entre las componentes $\bar{\zeta}$ (Rotxmed) y ζ' (Rot'x) en el instante $20\Delta t$ de integración en la que se observa que las perturbaciones turbulentas desarrolladas quedan comprendidas en el interior de la llamada **Tercera Zona**, mientras que la ausencia de perturbaciones tiene lugar en la **Primera Zona**, reservando la denominación de **Segunda Zona** a aquella estructura de la malla en la que las perturbaciones se encuentran en un estadio intermedio.

Las Figuras VI.28 a VI.30 corresponden a las evoluciones temporales, en un plano horizontal ubicado en la coordenada z del vórtice inicial, de las componentes de la perturbación turbulenta del vector vorticidad. De nuevo se mantienen para todas ellas las escalas correspondientes a los últimos instantes de integración. Se observa que:

- e) No se observa el carácter de elongación en las perturbaciones de las componentes de la vorticidad que si se observaba en los planos YZ.
- f) A diferencia de lo que ocurría con las componentes de la velocidad y sus perturbaciones (Figuras VI.2-3 y VI.9-10) las zonas que se ven afectadas, tanto por la vorticidad como por su perturbación turbulenta, tienen aproximadamente el mismo tamaño (Figuras VI.15-17 y VI.28-30), mostrando

con ello una única zona de influencia del vórtice en toda la malla.

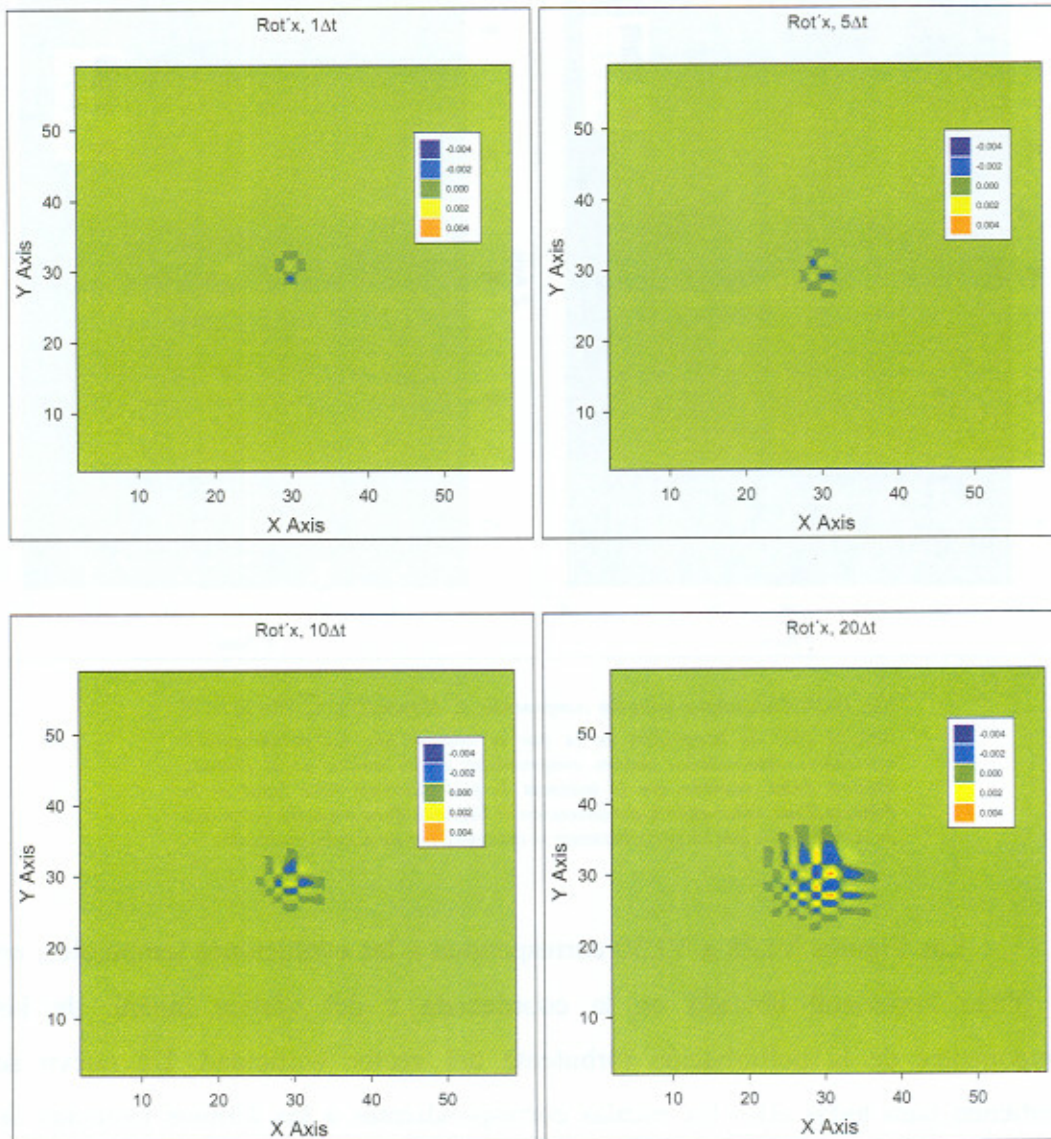


Fig. VI.28- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la componente x de la vorticidad ($Rot'x$) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes horizontales en planos XY.

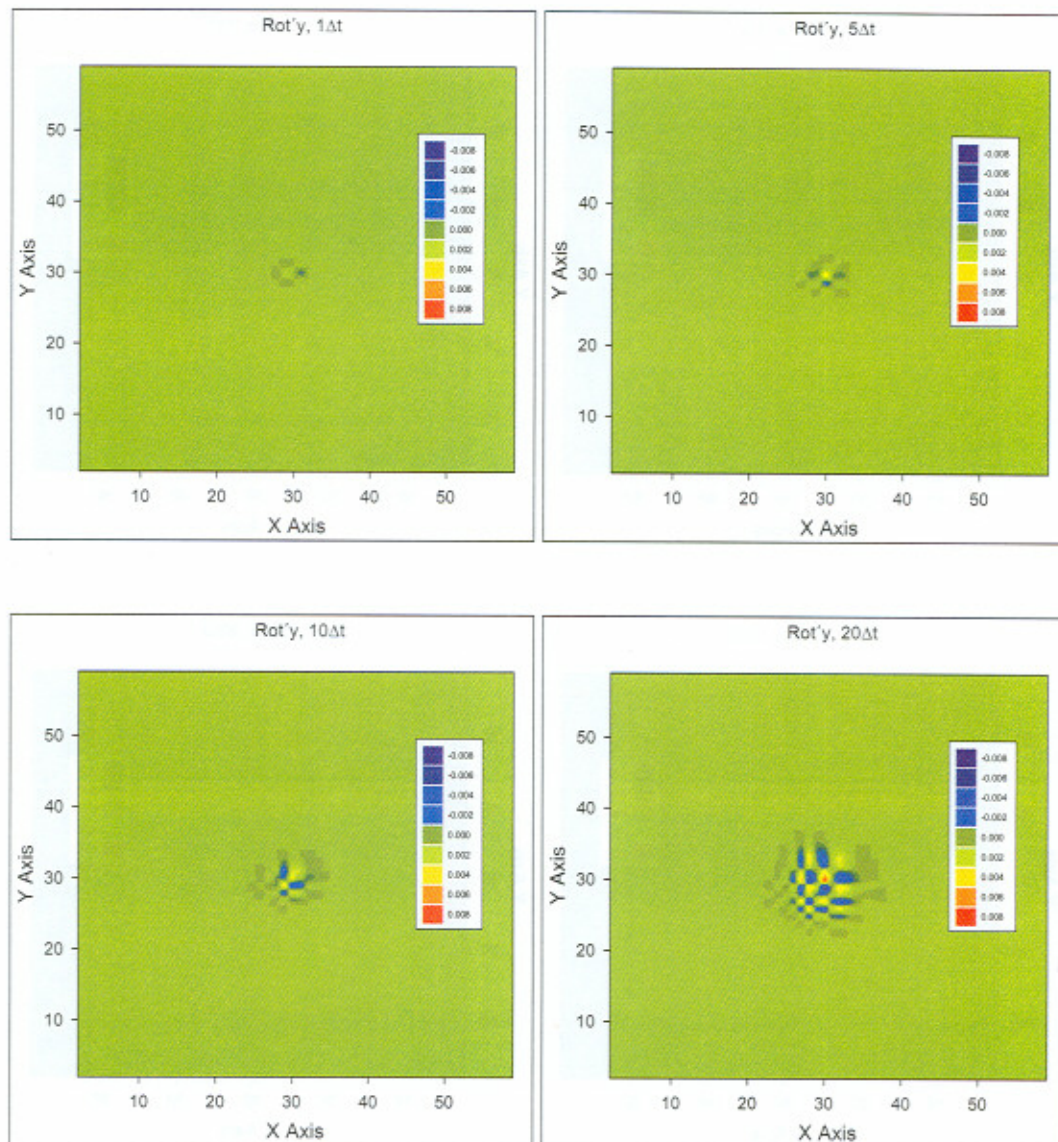


Fig. VI.29- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la componente y de la vorticidad ($Rot'y$) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes horizontales en planos XY .

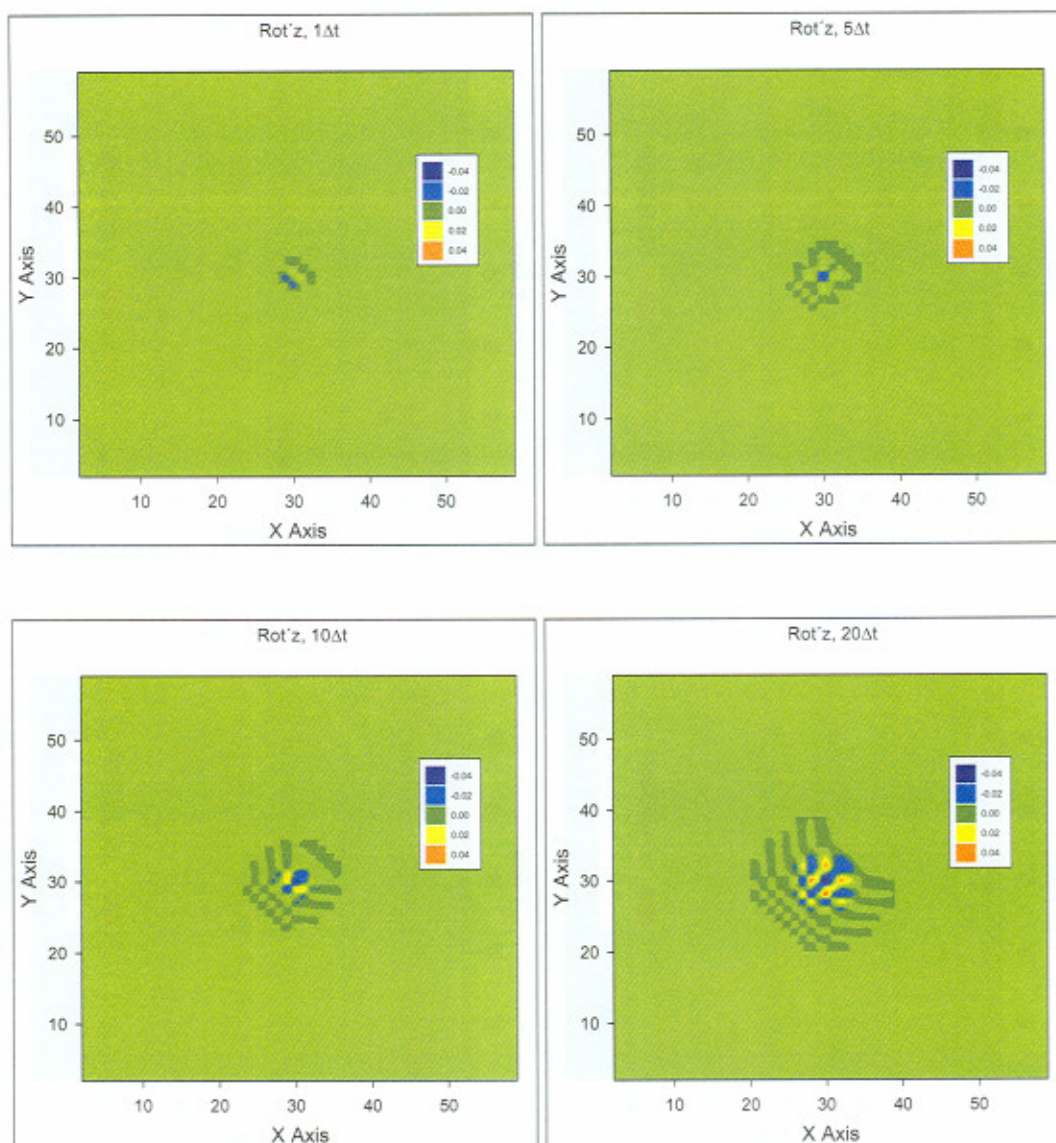


Fig. VI.30- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y su zona de influencia. Se muestra la perturbación turbulenta de la componente z de la vorticidad ($Rot'z$) desde el instante inicial ($1\Delta t$) hasta $20\Delta t$. Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Cortes horizontales en planos XY.

VI.2.6 PROYECCIONES 2D DE LOS VECTORES VELOCIDAD Y ROTACIONAL DE LA VELOCIDAD. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

Para finalizar el estudio de esta segunda fase de integración del primer caso estudiado (1 vórtice aislado) mostramos el análisis correspondiente a la construcción de proyecciones bidimensionales de los vectores velocidad y vorticidad a continuación (Figuras VI.31 a VI.34). Se observa que:



Fig. VI.31- Evolución temporal de las proyecciones del vector velocidad en cada punto de malla sobre planos YZ. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 10:1.

- Es difícil establecer una diferencia de comportamiento espacial y temporal, aún en el caso en el que estamos, con turbulencia desarrollada, de manera que sólo el análisis de los valores numéricos procedentes de las salidas del modelo

(figuras anteriores) nos proporcionaría alguna información acerca de dicho comportamiento.

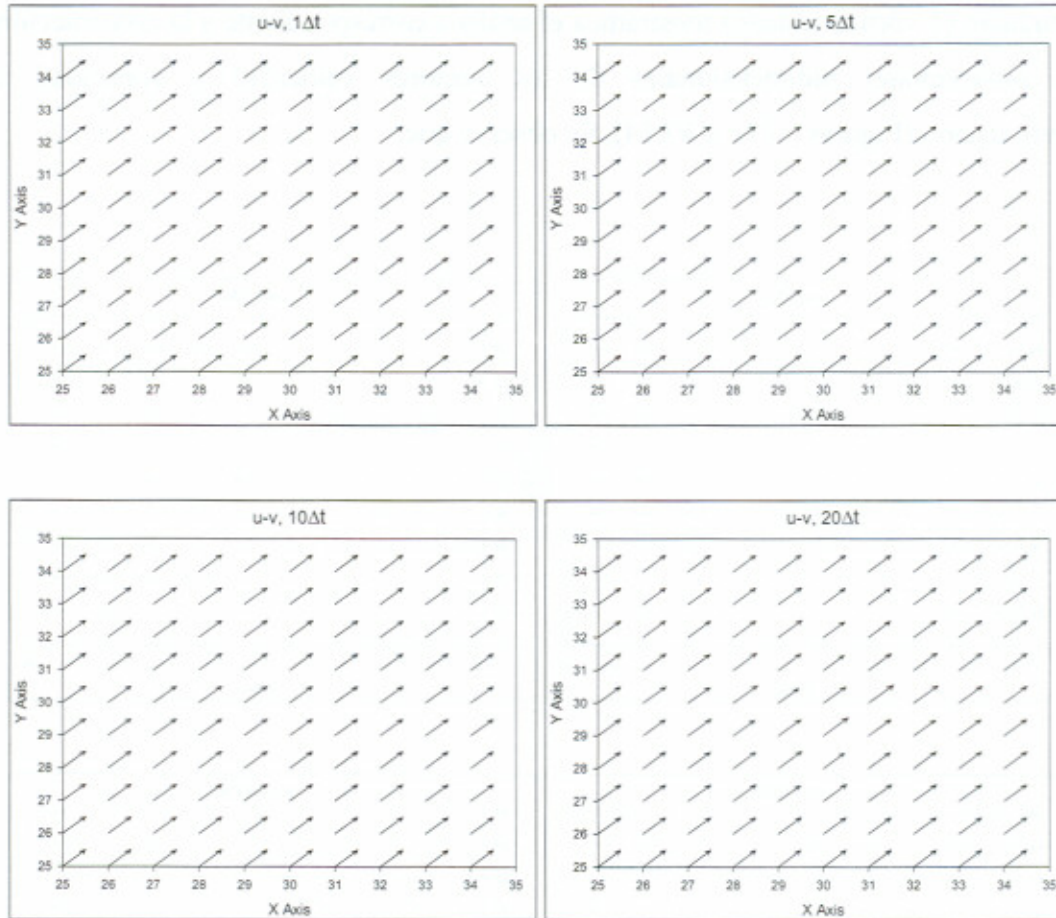


Fig. VI.32- Evolución temporal de las proyecciones del vector velocidad en cada punto de malla sobre planos XY. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 10:1.

- b) A causa de la diferencia entre la componente v y la w en la Figura VI.31 las flechas que caracterizan las proyecciones de los vectores velocidad difieren muy poco de segmentos horizontales; tan poco que es difícil la observación de este hecho aunque existe sin duda alguna ya que la componente v ronda las 5 unidades mientras que la w lo hace con 0'5. De hecho, el segmento situado en el punto (30, 60) para el estado inicial diferiría de sus segmentos vecinos en 0'1 para la componente horizontal y 0'01 para la componente

vertical, lo cual lógicamente impide la visualización (incluso aunque usáramos otro factor de escala).

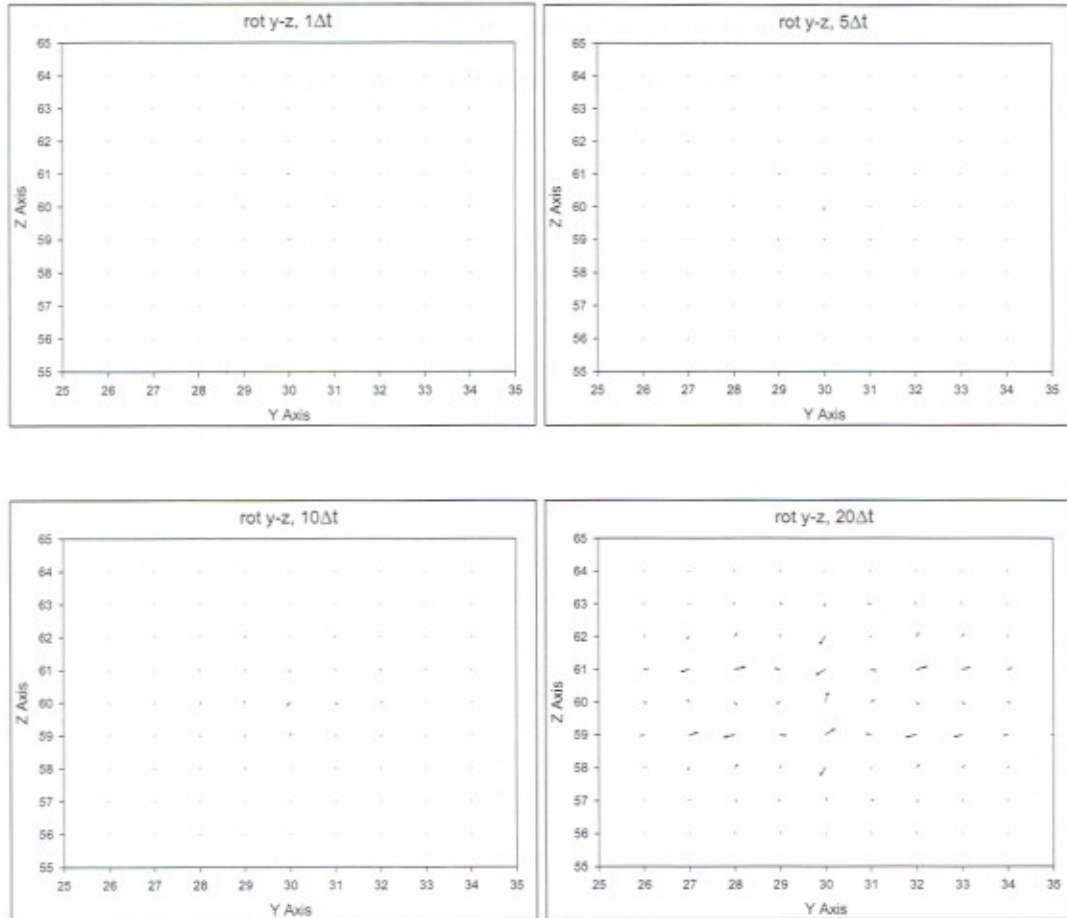


Fig. VI.33- Evolución temporal de las proyecciones del vector vorticidad en cada punto de malla sobre planos YZ. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 1:2.

- c) Transcurrido el tiempo hasta $20\Delta t$ encontramos una situación muy semejante a la descrita en el párrafo anterior, ya que la existencia progresiva de perturbaciones turbulentas mantienen diferencias notables con los valores medios para cada una de las componentes y salvo figuras relativas, como ha ocurrido con las anteriores, es prácticamente imposible observar visualmente alguna diferencia, aún cuando cuantitativamente existen.
- d) En la Figura VI.32 en la que se han representado las proyecciones del vector velocidad en planos XY, aunque

ahora estas parten de valores 5, 5 sobre los que se estipula una variación inicial de 0'1 y -0'1 continúan siendo muy pequeñas frente al valor dado como para que sea factible la observación visual de algún efecto diferencial. Sólo los análisis cuantitativos sobre las salidas del modelo informan de que existen diferencias, aunque pequeñas.

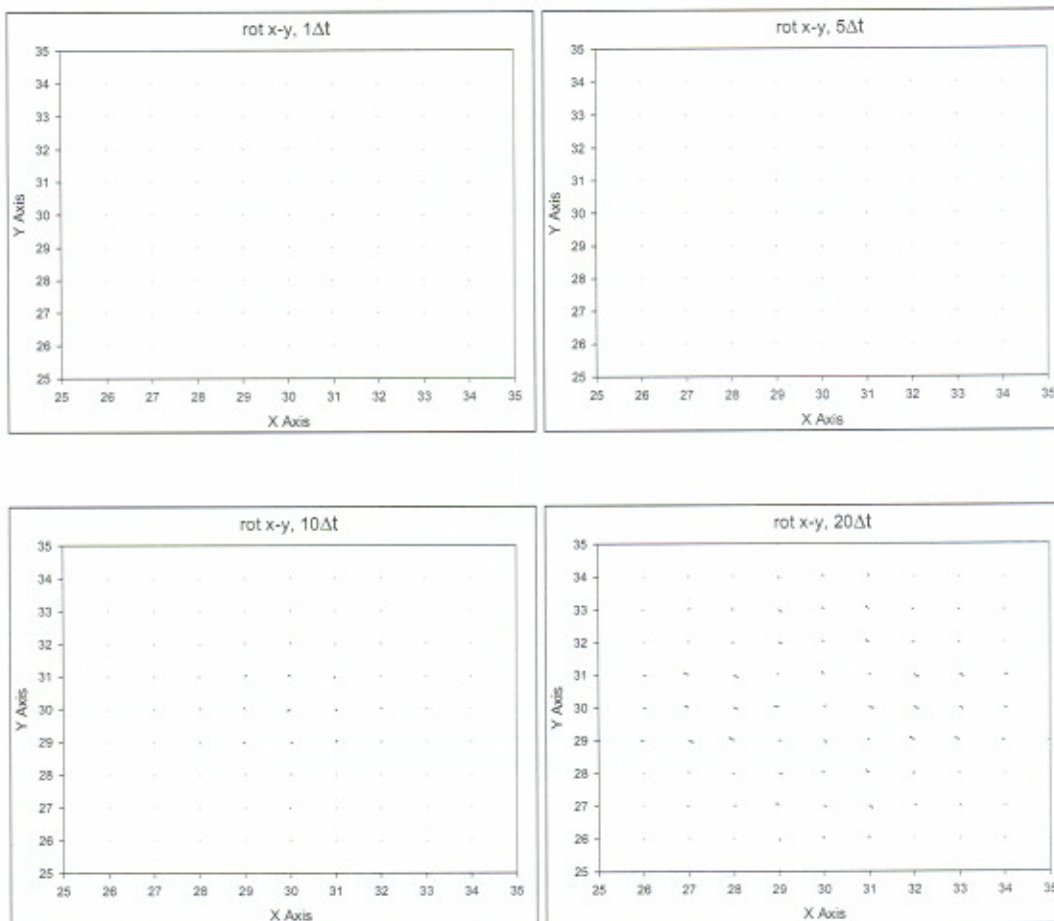


Fig. VI.34- Evolución temporal de las proyecciones del vector vorticidad en cada punto de malla sobre planos XY. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 1:2.

- e) Los vectores representativos de las proyecciones en planos XY se encuentran en torno a 45 grados debido a la igualdad de sus componentes u y v , mencionada en el párrafo anterior. Así pues, el extremo de los correspondientes vectores bidimensionales se encontraría en un entorno también bidimensional del extremo del segmento, pero oscilando

cantidades muy pequeñas que hacen imperceptible al ojo humano alguna variación digna de ser mencionada.

- f) La Figura VI.33 muestra este caso a través de un enfoque diferente, esto es, las proyecciones sobre planos YZ de los vectores rotacional de la velocidad, o lo que es lo mismo, sus componentes η y ξ .
- g) En el instante inicial, como era de esperar, el valor numérico para ambas componentes es nulo, a excepción de los cuatro puntos adyacentes al del centro de la malla (posición inicial del vórtice).
- h) Transcurridos los tiempos de integración de la segunda fase, el efecto se va haciendo más visualizable (mucho más si cabe que con las proyecciones de los vectores velocidad) y extendiéndose a zonas crecientes de la malla ($20\Delta t$).
- i) La distribución del vector bidimensional pone de manifiesto que las partículas fluidas al encontrarse sometidas a diferentes vectores velocidad, tanto en módulo como en dirección y sentido, deberán estar sometidas a rotaciones que son precisamente los efectos que el modelo identifica como propios y caracterizadores de la turbulencia.
- j) La Figura VI.34 corresponde a las proyecciones sobre planos XY de los mismos vectores vorticidad y salvo factores de escala proporciona la misma información que la Figura VI.33.

VI.2.7 ANÁLISIS COMPARATIVO PRIMERA Y SEGUNDA FASES Vs. TERCERA FASE.

Para dar paso a la presentación de las figuras obtenidas y del estudio de las mismas presentamos en primer lugar la comparación de dos estadios, uno el último de la primera fase ($20\Delta t$) y otro al comienzo de la tercera fase ($50\Delta t$), Figura VI.35, con objeto de poder asimilar el salto funcional y cuantitativo que supone el abandono de las ecuaciones de Navier-Stokes como descriptoras del problema. Se añade además la Figura VI.36 que muestra nítidamente el salto a que nos estamos refiriendo y cómo el uso de las ecuaciones apropiadas encauza la variabilidad de las magnitudes suavizándolas profundamente y a lo largo de muchos pasos de integración. Se observa que:

- a) En la Figura VI.35 se presentan simultáneamente el último estadio de las figuras de la segunda fase junto con el estadio correspondiente a $50\Delta t$, ya en la tercera fase de integración (planos YZ y XY).
- b) En los planos XY se observa una continuación del comportamiento expandiéndose el efecto a zonas mayores de la malla conservando aún la estructura característica de la segunda fase (alternancia, asimetría, etc.).
- c) El conjunto de valores extremos, tomados según escalas de dibujo de $20\Delta t$ para ambos, es más alejado del valor característico de la malla en las zonas no afectadas por el vórtice, esto es 0'5, para este caso que para el $50\Delta t$, lo cual procede lógicamente de una amortiguación en las variaciones sufridas en el campo de w . Este hecho hace que las gráficas correspondientes a $50\Delta t$ presenten una aparente menor nitidez que las de $20\Delta t$.
- d) Este efecto se reproduce prácticamente por igual en los cortes YZ y en los XY.

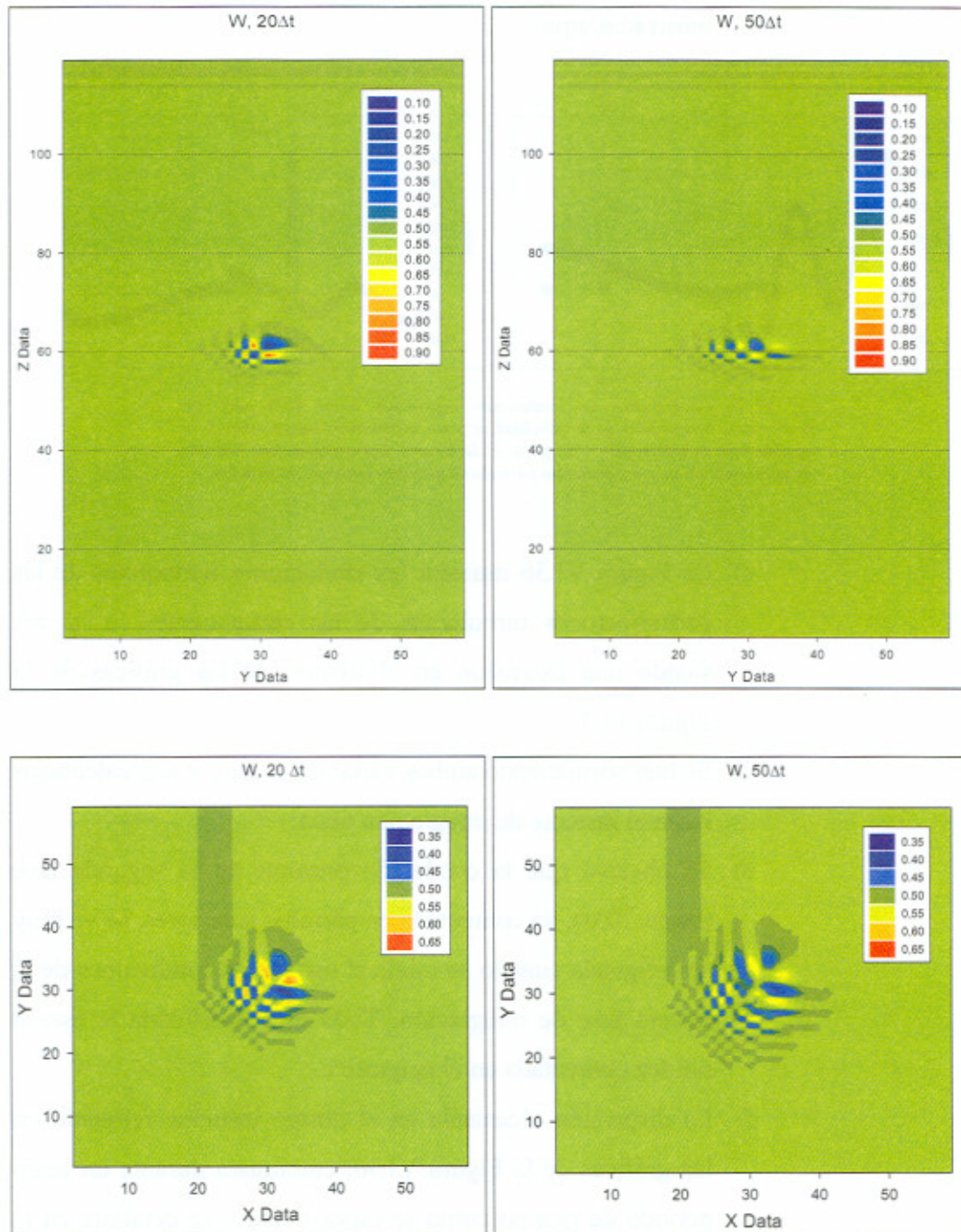


Fig. VI.35- Comparativa de instantes $20\Delta t$ y $50\Delta t$ para la componente w en planos YZ ($x=30$) y XY ($z=60$), mostrando diferencias de tamaño en el desarrollo de los vórtices y una cuantificación diferencial entre ambos instantes. Se ha elegido la escala de dibujo del primero de los dos instantes y se le ha dado mayor detalle con el objeto de que se pueda mejorar la comparación entre los dos momentos.

- a) El corte en los planos YZ muestra también la continuación de la elongación del vórtice según avanza el tiempo de integración en la tercera fase.

- b) Estos efectos son observables para las componentes u y v no mostradas aquí

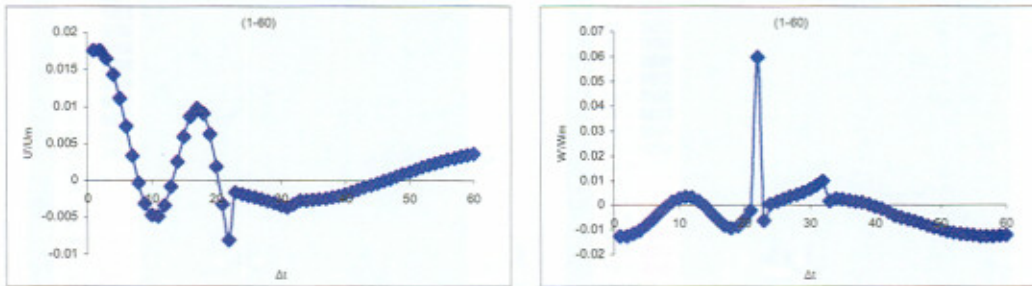


Fig. VI.36- Comparativa de evoluciones temporales hasta $60\Delta t$ para las componentes perturbadas de la velocidad, u' y w' , conteniendo información de la segunda fase de integración y de parte de la tercera. Las componentes han sido normalizadas con u_m y w_m evaluadas para los 60 primeros pasos de integración.

- c) La Figura VI.36 muestra las evoluciones temporales de las perturbaciones turbulentas de las componentes, u' y w' , siendo una extensión en el tiempo de las gráficas de la Figura VI.1.
- d) Se han normalizado ambas variables con u_m y w_m , calculadas hasta el instante de integración $60\Delta t$.
- e) Se observa que la oscilación presente en la segunda fase (hasta $20\Delta t$), ya comentada en párrafos anteriores, se ve muy amortiguada cuando se inicia el uso de las condiciones de la tercera fase de integración. Todo esto justificaría la escasa nitidez comentada en el epígrafe c.
- f) La dispersión alcanzada en el último instante, reflejado en las gráficas de la Figura VI.36, continuará durante un largo período de tiempo como se especificará y se detallará en la descripción de la tercera fase de integración.

VI.2.7 VARIABLES PUNTUALES. TERCERA FASE.

Una vez desarrollados los comentarios pertinentes para la explicación de la primera y segunda fases de integración del modelo numérico propuesto, pasamos a efectuar el mismo tipo de descripción para la tercera fase de integración.

Las condiciones en las que se va a desarrollar esta nueva fase corresponden a: condiciones iniciales, la situación final del proceso alcanzada tras, en este caso, los 22 primeros pasos de integración; ecuaciones de gobierno del modelo, las que proporcionan la ecuación turbulenta (en valores medios) que contienen intrínsecamente los efectos de rotación mediante el vector vorticidad; la ecuación de continuidad y la ecuación de difusión turbulenta del calor.

Al aplicar las condiciones de desarrollo y las ecuaciones para la presentación de las salidas del modelo correspondientes a la tercera fase de integración se ha observado que la variable θ y su perturbación turbulenta, θ' , presenta un comportamiento, sobre todo en lo que a la cuantificación se refiere, nítidamente diferente de lo que ocurre con las componentes de la velocidad y sus perturbaciones turbulentas (dispersión mucho mayor, Figura VI.37, en valores absolutos, aunque normalizadas siguen siendo aceptables, Figura VI.38).

Una posible razón que justificaría que las variaciones de la temperatura potencial conduzcan a una importante dispersión de las soluciones de la correspondiente ecuación en esta magnitud y en la tercera componente de la velocidad reside en que el modelo en ningún caso usa la temperatura potencial para determinar las condiciones de estabilidad y de Courant-Friedrich-Lewy, mientras que sí las establece a través de las propias condiciones iniciales de la velocidad planteada. Con esto se limita el comportamiento de los intervalos espaciales y temporales, afectando posteriormente a los cálculos de las diferentes componentes de la velocidad y la temperatura potencial.

Dado que los términos ascensionales son varios órdenes de veces mayores que el resto de los sumandos que les acompañan (ya que contienen como factor la gravedad) y dependen de la temperatura potencial, sus efectos sólo se encuentran en la componente w , por lo que la componente vertical de la velocidad presenta una serie de anomalías cuantitativas cuando se normaliza con su velocidad w_m (ver Figura VI.38), frente al comportamiento simultáneo de las variables u'/u_m (U'/U_m) y v'/v_m (V'/V_m).

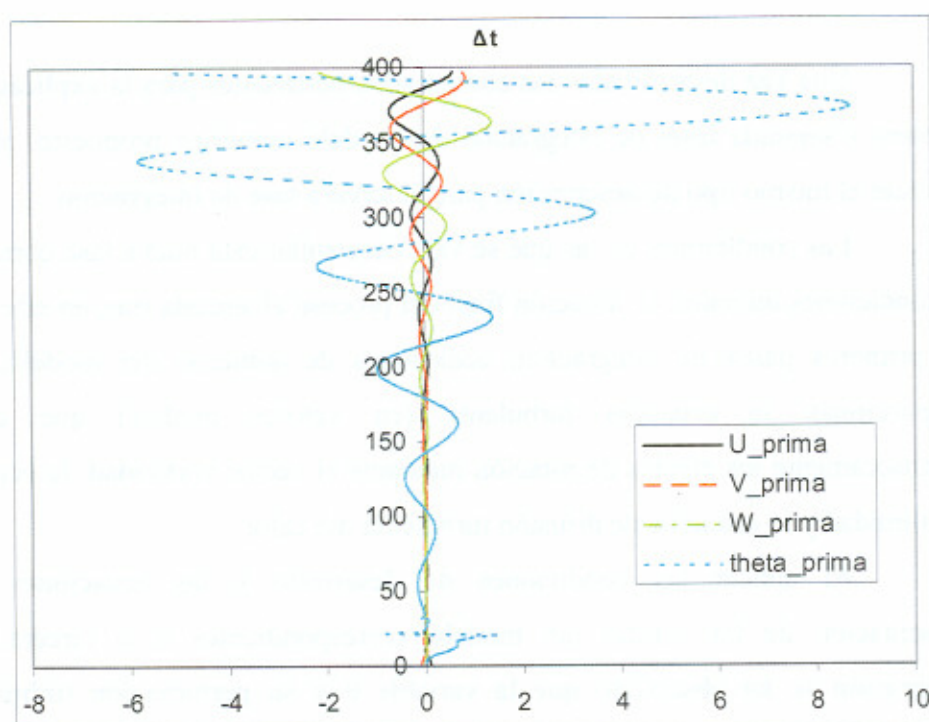


Fig. VI.37- Evolución temporal de las perturbaciones absolutas de las componentes de la velocidad (u', v', w') y de la Temperatura Potencial (θ') a lo largo de todo el proceso de integración, en el punto central de la malla. Se observa claramente el aumento de dispersión de las soluciones, sobre todo de la temperatura potencial.

La Figura VI.37 muestra que, transcurrido un tiempo suficiente, las perturbaciones u' , v' y w' llegan a ser del mismo orden ($u' \approx v' \approx w'$), pese a que inicialmente se propusieron como $u' \approx v' \approx 10w'$. Al evaluar las perturbaciones normalizadas (Figura VI.38) se observa que el comportamiento cuantitativo de w'/w_m difiere en un orden de magnitud del que presentan u'/u_m y v'/v_m (incluso del de θ'/θ_m). Entendemos que las razones se encuentran en los factores de normalización, que en el caso de u y v eran en torno a 5, 5 y en el de la temperatura potencial cercano a 300, mientras que en el caso de w lo era aproximadamente de 0.5.

El análisis de la Figura VI.37 informa, al igual que la VI.1 para la primera y segunda fases, de la evolución temporal, a lo largo de la tercera fase de integración, de las perturbaciones de las componentes de la velocidad y temperatura potencial, *normalizadas* con sus valores promedios obtenidos a lo largo de los pasos de integración $24\Delta t$ hasta $400\Delta t$ (se ha eliminado el paso 23 para evitar el salto que se produce entre la segunda y tercera fases sobre las magnitudes calculadas).

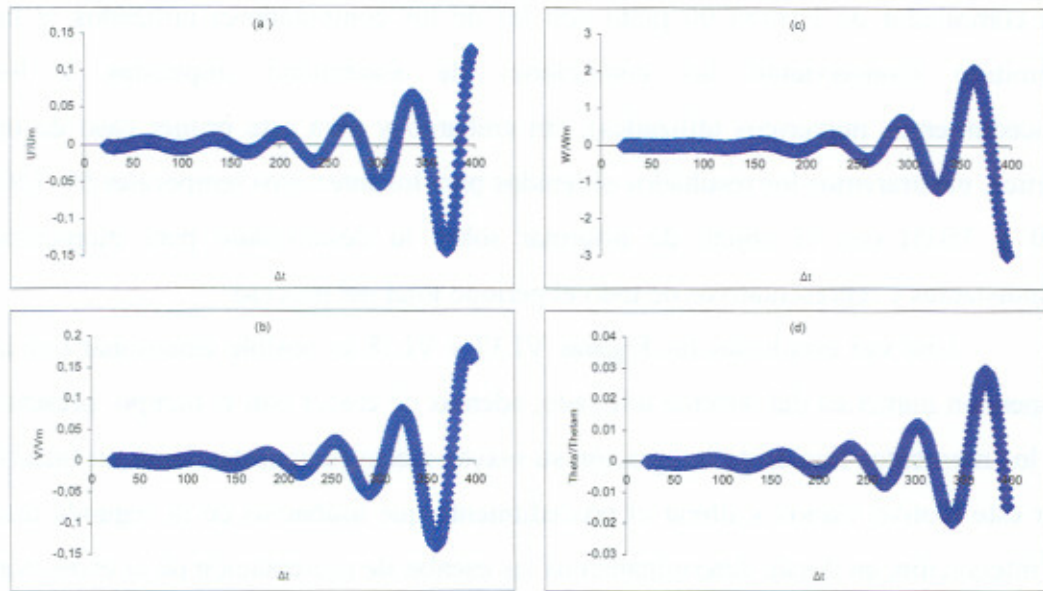


Fig. VI.38- Evolución temporal de las perturbaciones *normalizadas* con los promedios temporales (24-400 Δt) de cada serie de las tres componentes de la velocidad junto con la temperatura potencial, para el punto central de la malla, a lo largo de la tercera fase de integración, obtenidas mediante el uso de las ecuaciones propuestas en esta memoria. (a) Componente u, (b) idem v, (c) idem w y (d) Temperatura Potencial (θ).

Las gráficas correspondientes a las magnitudes u'/u_m y v'/v_m presentan unas variaciones del mismo orden y relativamente acopladas (observado también en la Figura VI.37).

La componente w'/w_m presenta una variación cuantitativamente diferente según se justificó en párrafos anteriores. Además, su evolución está desacoplada de las anteriores a través de un factor aproximadamente de π (observado también en la Figura VI.37). Tal y como era esperable, la escala de la magnitud w'/w_m difiere de las de u'/u_m y v'/v_m en un factor 10 aproximadamente (lo que genera $u' \approx v' \approx -w'$, observado también en la Figura VI.37).

La gráfica d de la Figura VI.38 muestra la variación de la perturbación de la temperatura potencial *normalizada* con su promedio temporal (θ'/θ_m). La cuantificación observada se corresponde perfectamente con las obtenidas para u'/u_m y v'/v_m (justificado ya que $\theta_m \approx 300$), aunque en la Figura VI.37 la perturbación absoluta difiere cuantitativamente bastante, como es lógico. La evolución observada se acopla bastante bien a la de w'/w_m , con un pequeño desfase, lo cual se ajusta bien al desarrollo de la relación entre movimientos convectivos y distribuciones de temperatura viéndose complementados por las perturbaciones de ambos campos.

Esta tercera fase de integración se ha desarrollado hasta que las capacidades del compilador de Fortran 90 junto con las de los computadores utilizados lo ha permitido (conservando las condiciones de estabilidad impuestas a los procedimientos numéricos utilizados); sin embargo y para este primer caso de un vórtice, mostraremos los resultados obtenidos para los intervalos temporales 50, 150, 250 y $350\Delta t$ con el objeto de informar sobre lo desarrollado para momentos equidistantes y representativos de todo el período total del proceso.

Una vez estudiadas las Figuras VI.37 y VI.38 es posible determinar que la dispersión numérica del sistema utilizado, además de crecer con el tiempo, presenta en los momentos finales de integración su mayor efecto (comportamiento no lineal). Por este motivo vamos a alterar el procedimiento que usábamos en la segunda fase de integración, en donde determinábamos las escalas de presentación de la evolución del vórtice según diferentes planos, tomando como referencia el último caso, esto es $20\Delta t$. Ahora utilizaremos, para las figuras de la tercera fase, el momento 250 como base referencial del color de las escalas para los momentos 50 y 150, manteniendo el instante 350 según sus propios criterios automáticos en cuanto a dicha escala.

A lo largo de esta tercera fase hemos determinado usar la malla completa como escala horizontal y vertical para la exposición de los diferentes momentos, esto es debido a que el crecimiento del vórtice va alcanzando zonas cada vez mayores con el paso del tiempo, con lo que supera con rapidez los límites establecidos en las figuras de la segunda fase. Por esta razón, mientras las figuras de la primera y segunda fases se delimitaban entre las celdillas 15-45 para las coordenadas horizontales y 35-85 para la vertical, en esta se extienden las figuras hasta la máxima capacidad de la malla, es decir, 1-120 para la coordenada vertical y 1-60 para las horizontales.

Las condiciones descritas en el párrafo inmediato anterior trascienden los conceptos asociados a ciertas peculiaridades de algunas gráficas y así por ejemplo, aquellas que presentan bandas, en las cercanías de los límites verticales superior e inferior, que según la escala de color corresponderían a cuantificaciones diferentes de las variables de la de malla sin perturbar, proceden del efecto de los bordes y más concretamente del hecho de tomar la aproximación descrita en capítulos anteriores, por mínimos cuadrados, lo cual no asigna valores reales a esas zonas de la malla. De todas formas, esta aproximación asigna valores cercanos a los reales que corresponderían a dichas zonas de la malla, de manera que las diferencias entre

valores reales y asignados no afecten en ningún momento de integración a cualquier zona de influencia del vórtice.

Además, se observan algunas zonas entre el borde y el desarrollo del vórtice con tonos de color correspondiente a valores que no son realmente los que tienen asignadas las celdillas correspondientes. Este hecho, al igual que ocurría a lo largo de la segunda fase de integración, procede de problemas internos del software de representación gráfica.

La Figura VI.39 muestra la evolución de las perturbaciones que induce el vórtice inicialmente situado en el centro de la malla sobre la componente u para los momentos de integración establecidos en el párrafo anterior. Se observa que:

- a) La zona afectada continúa creciendo a partir del instante final de la segunda fase que se convierte en condiciones iniciales para la resolución de sistema de ecuaciones que corresponde a esta tercera fase.
- b) La alternancia de valores mayores y menores que un valor medio dado continúa presente en la evolución y tras el estudio de la Figura VI.38 no parece aplicable que este comportamiento proceda de perturbaciones procedentes de afectos armónicos.
- c) El crecimiento de la zona afectada no presenta simetría respecto a los ejes considerados, siendo muy superior en el eje horizontal que en el vertical. De hecho la escala de tamaño vertical de la zona de influencia es prácticamente estable a lo largo de toda esta fase, frente al crecimiento sufrido por la escala de tamaño en el eje y .
- d) La gráfica para el instante $350\Delta t$ muestra una tendencia a delimitar tres zonas de comportamientos diferenciales (señaladas aproximadamente con dos segmentos verticales punteados). Este hecho se verá confirmado posteriormente cuando se analicen las distribuciones espaciales del campo de velocidades en planos XY y dado que el comportamiento de dichos efectos se extiende, como hemos visto, al resto de

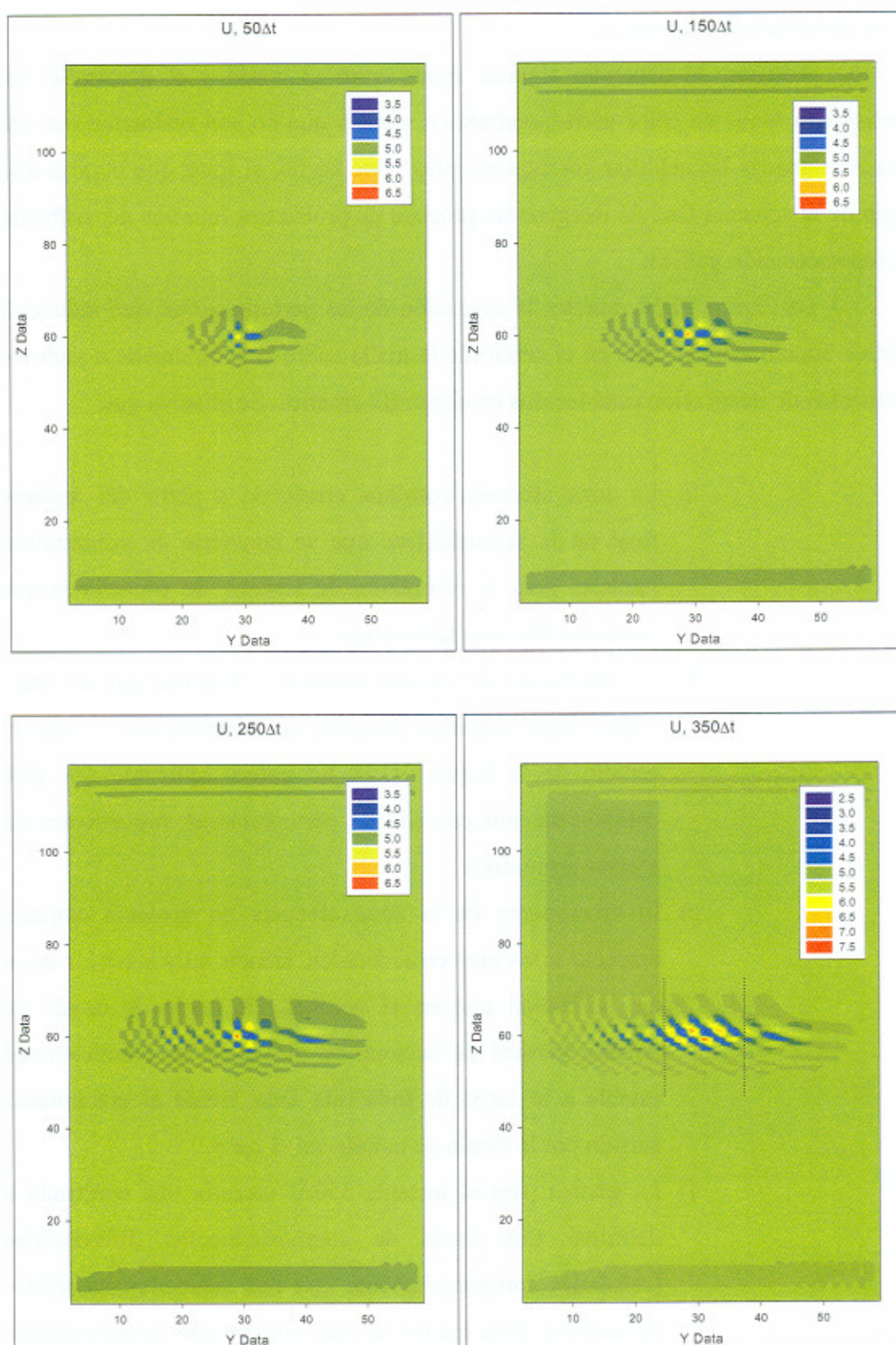


Fig. VI.39- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ . Se muestra la componente u de la velocidad desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Zonas inferior y superior afectadas por los bordes de la malla de integración.

componentes de la velocidad y temperatura potencial, esta observación también será aplicable a v , w y θ .

- e) Los efectos de desplazamiento de las perturbaciones a lo largo del eje Y , diferenciales respecto del eje z , mencionados en la segunda fase también se observan en esta. Como entonces, la causa proviene de la diferente velocidad asignada y calculada sobre las direcciones y y z .

No se presentan en la memoria las figuras correspondientes a las evoluciones de la componente v dada la similitud de comportamiento de la u (proveniente de las condiciones iniciales para ambas coordenadas -5 y 5 - y de los parámetros incluidos en las ecuaciones para el cálculo de ellas). Además, los análisis realizados en el trabajo de gabinete no han aportado ningún hecho diferencial reseñable respecto de la primera componente de la velocidad.

La Figura VI.40 muestra la evolución del desarrollo de las perturbaciones, en cuanto a la variable w se refiere, inducidas por el vórtice inicialmente situado en el centro de la malla. Se observa que:

- f) Los apartados a, b, c y e inmediatos anteriores son de aplicación sin modificación alguna para la explicación del comportamiento de la Figura VI.40.
- g) La separación en tres zonas aproximadas es observable a partir de la gráfica correspondiente a $150\Delta t$. Es esperable que la observación de estas zonas, tanto en esta gráfica de la Figura VI.40 como en otras en las que se hace mención específica del hecho, esté afectada, además de por los campos de velocidad, por la referencia de escalas para cada una de las figuras representadas. Pensamos que esta es la razón por la que se observa dicha separación en algunas variables, en incrementos temporales de integración, diferentes de la observación de otras. Incluso, como se describirá más adelante, se ha detectado que los mejores

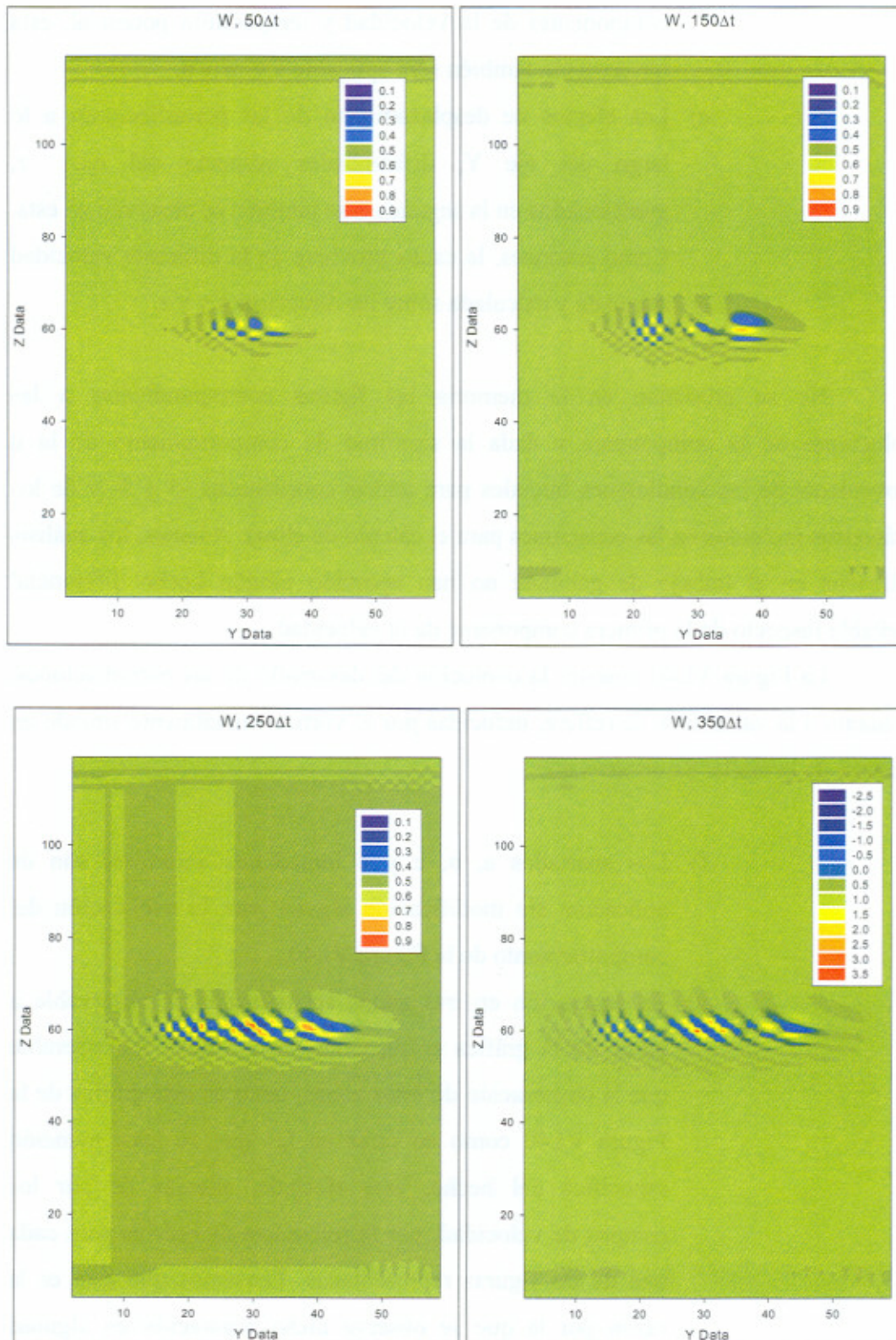


Fig. VI.40- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ . Se muestra la componente w de la velocidad desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Efecto de bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

campos de observación de estas zonas corresponden a las gráficas de las perturbaciones turbulentas.

- h) Una comparación entre las gráficas de $250\Delta t$ y $350\Delta t$ de las figuras VI.39 y VI.40 nos muestra que el comportamiento de los valores extremos de ambas variables no es parecido. Mientras que el crecimiento de u sobre la velocidad inicial de la malla, esto es 5 unidades, alcanza valores cercanos a 6'5 unidades (30%) para $250\Delta t$ y 7'5 unidades (50%) para $350\Delta t$, en el caso de la componente w se parte de valores iniciales de 0'5 para alcanzar valores cercanos a 0'9 (80%) para $250\Delta t$ y 3'5 unidades (700%) para $350\Delta t$. Esta es la razón fundamental de la pérdida de validez y calidad de la respuesta del modelo, tal como se expuso en el campo de perturbaciones turbulentas de la Figura VI.37. Pese a lo cual mostramos comportamientos avanzados hasta incluso $400\Delta t$ en algún momento, ya que los aspectos cualitativos sí informan de evoluciones y desarrollos coherentes con las fases del modelo en el que la dispersión de soluciones no es aún excesiva.

La Figura VI.41 corresponde a las evoluciones temporales de las distribuciones espaciales en la malla del campo de temperaturas (temperatura potencial, θ). Se observa que:

- i) Las propiedades observadas en los apartados de u y w (a, b, c, e y g) prácticamente son trasladables a la temperatura potencial.
- j) Como se comentó con anterioridad, las grandes perturbaciones absolutas de la temperatura potencial respecto del valor de la malla, esto es 300, justifican, a través de los términos ascensionales, la gran dispersión en la gráfica de $350\Delta t$ de la Figura VI.40.

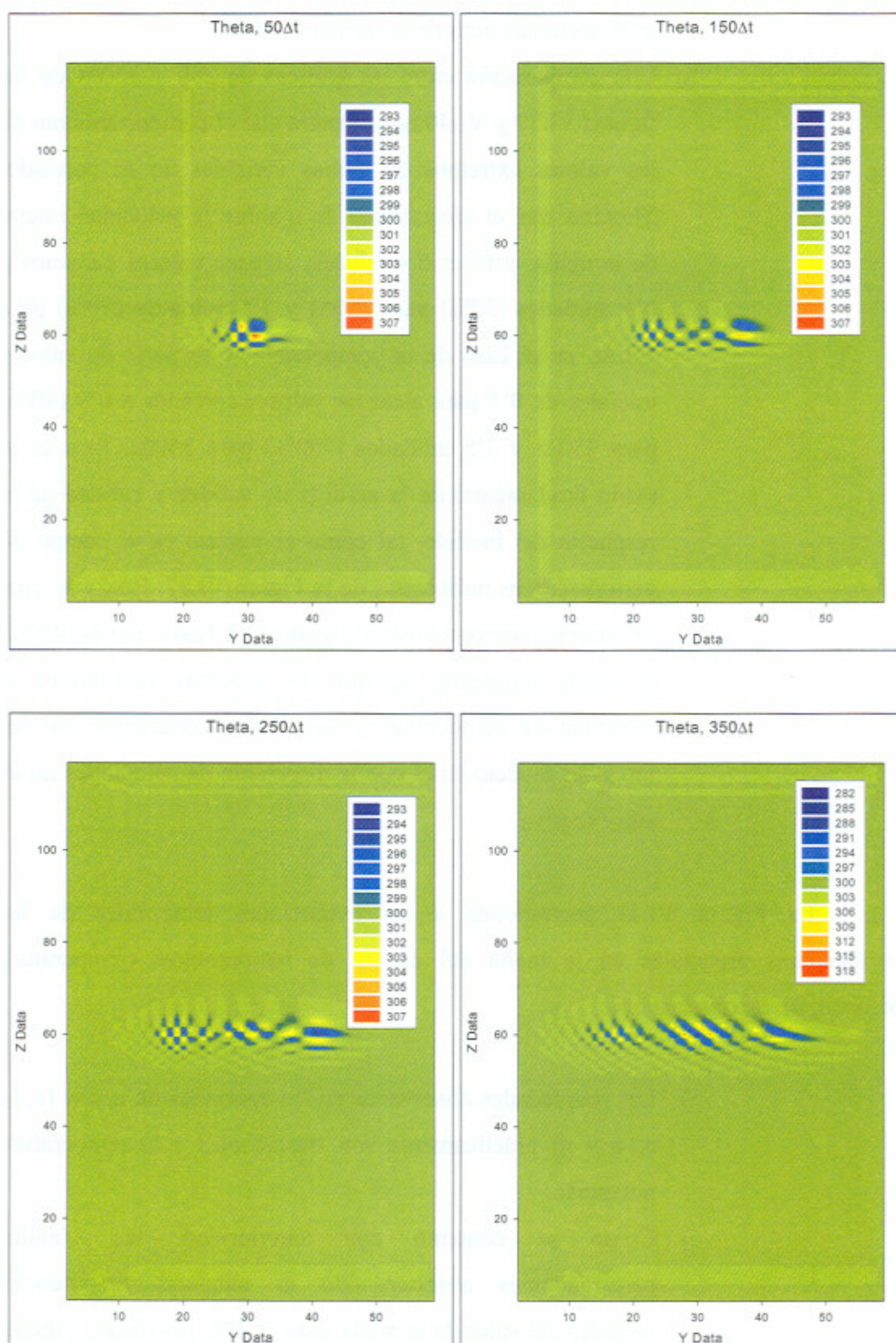


Fig. VI.41- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ. Se muestra la temperatura potencial (Theta) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Efecto de bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

La Figura VI.42 muestra las evoluciones temporales del crecimiento o elongación de la zona de malla afectada por el desarrollo del vórtice para los campos de las componentes de la velocidad y de la temperatura potencial (u , v , w y θ). Se ha elegido como factor indicativo de crecimiento el tamaño del semieje mayor (eje y) de las áreas afectadas por el vórtice en los planos verticales, en los que se visualiza fácilmente el aspecto elíptico que presentan. Se observa que:

- a) Las líneas que muestran el crecimiento del semieje mayor se han ajustado mediante una lineal para cualquiera de las cuatro variables tomadas para este estudio.
- b) Los coeficientes de regresión muestran que los ajustes seleccionados presentan una alta fiabilidad estadística (valores de R^2 muy cercanos a 1).
- c) Es destacable el paralelismo de las diferentes líneas de ajuste, indicando que el aumento es prácticamente el mismo para las cuatro variables, presentando un valor numérico aproximado de 0'11 (pendiente de las rectas), lo cual corresponde a un 11% relativo de expansión del vórtice
- d) El término independiente de las diferentes líneas de ajuste difiere ligeramente indicando con ello que el valor de partida para la elongación del vórtice es distinto según la variable utilizada.
- e) La última parte de las líneas correspondientes a los datos mostrados en la Figura VI.42 obtenidos mediante el modelo varía hacia el final del proceso de integración, ya que cada variable se ve afectada de manera distinta por los bordes laterales de la malla y el proceso ya descrito, en capítulos anteriores, de incorporación de coronas exteriores para suplir la pérdida de información.
- f) Según el apartado c) referenciado a la Figura VI.39, el crecimiento del semieje menor (coordenada z) presentaba una estabilidad aproximada respecto de la elongación sufrida por el semieje mayor. Realmente el crecimiento es despreciable frente al del eje y y por ser del orden del 10% de

este último. En modelizaciones complementarias a este caso de un único vórtice con velocidades 5, 5, 0'5 en las que se ha establecido velocidades iniciales 5, 5, 5 el crecimiento de los tres ejes ha sido totalmente comparable (no se presentan las gráficas correspondientes a $w=5$ por no aportar ninguna novedad respecto a la Figura VI.42 y las observaciones establecidas hasta ahora).

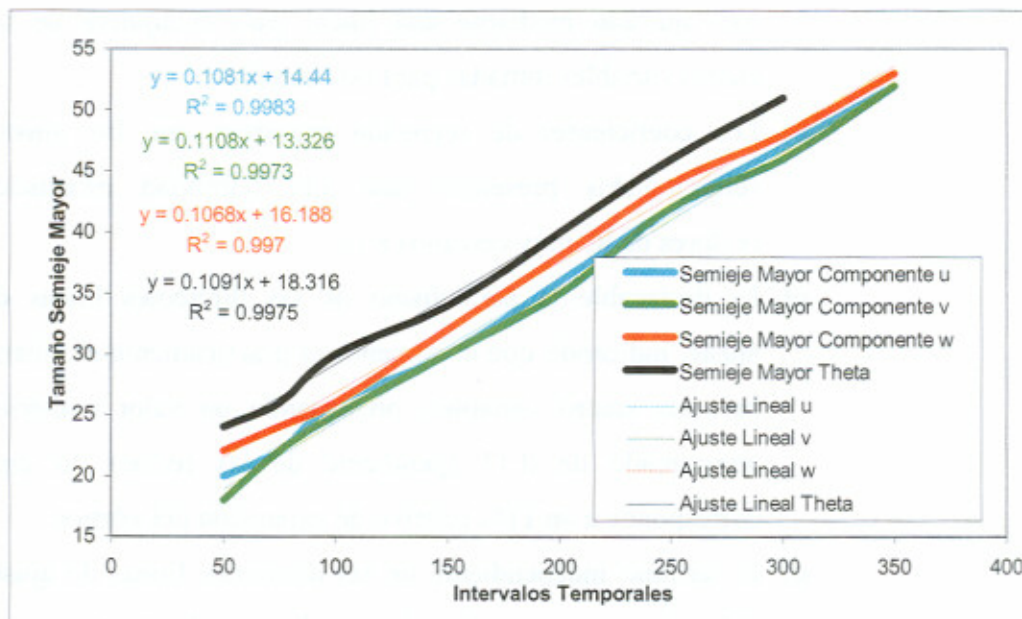


Fig. VI.42- Ajustes lineales para el crecimiento de la coordenada horizontal Y (elongación) del tamaño de la zona afectada por el vórtice instalado en la zona central de la malla para la tercera fase de integración del modelo. Variables ajustadas: u, v, w y θ . La leyenda interior especifica el ajuste de cada variable y los parámetros numéricos del mismo. Se entiende como Semieje Mayor la elongación a lo largo de la mayor dimensión de la zona. El tamaño está medido con el número de celdillas afectadas y el tiempo en Δt .

El análisis de la elongación de los semiejes x e y en planos XY ha mostrado un comportamiento idéntico en ambos ejes. Por esta razón se ha eludido la presentación de gráficas justificantes de este comportamiento que podríamos expresar diciendo que las zonas afectadas en la malla tienen aspecto circular en los planos horizontales.

Las Figuras VI.43, 44 y 45 muestran la información de la evolución del vórtice en planos XY para las componentes u y w de la velocidad y la temperatura potencial θ . La observación de las mismas conduce a la descripción de las siguientes características:

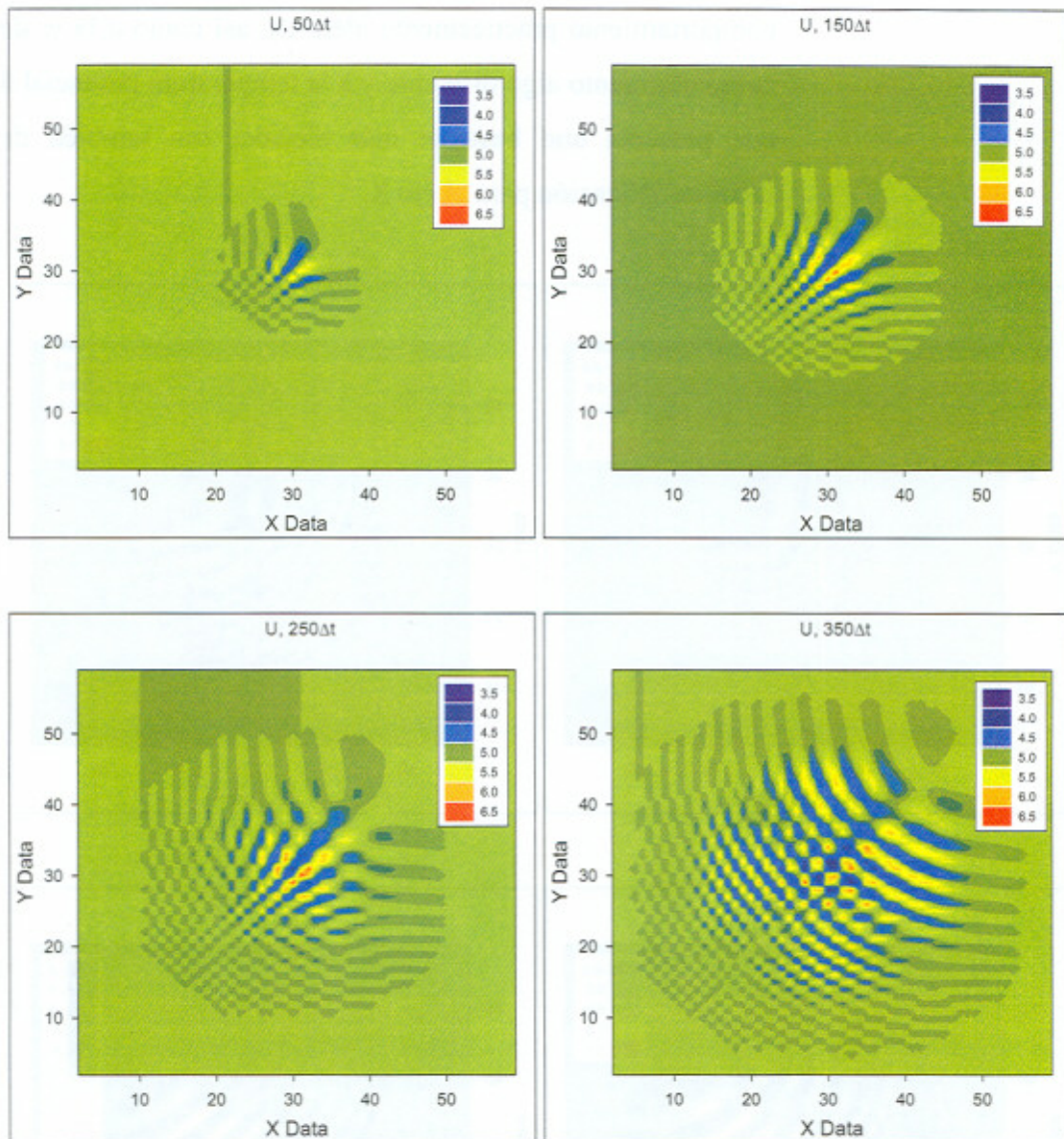


Fig. VI.43- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY . Se muestra la componente u de la velocidad desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

- Los apartados a y b correspondientes a la descripción de las Figuras VI.39 a 41 (planos YZ , mismos momentos) se verifican tal cual y son trasladables al análisis actual.
- El proceso de crecimiento, a diferencia del mostrado en los planos YZ , sí presenta simetría de tamaños, haciendo que las zonas afectadas se asemejen a estructuras circulares, en lugar de a elípticas. Por esta razón los ajustes lineales a las curvas de comportamiento temporal de crecimiento (Figura VI.42),

que se han aplicado a las componentes u y v de comportamiento prácticamente idéntico, así como a la w de comportamiento algo diferente y a la temperatura potencial θ que presenta uno bastante más alejado, son también de idéntica aplicación para el eje X .

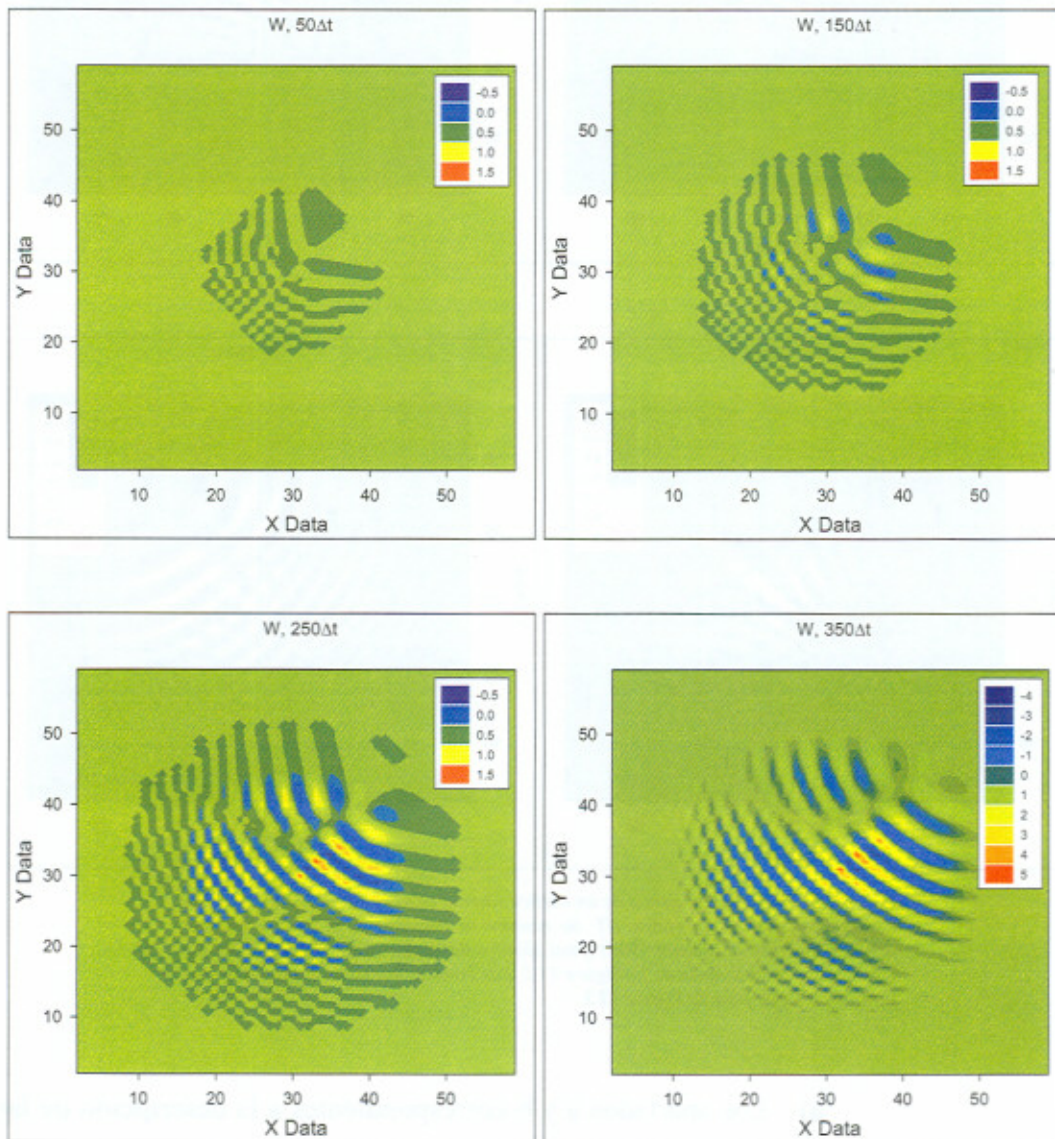


Fig. VI.44- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY . Se muestra la componente w de la velocidad desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2.

- c) Las estructuras observadas en estos planos y sobre todo cuando los tiempos de integración han avanzado suficientemente presentan divisiones estructurales que, a diferencia de las zonas estudiadas en el apartado d y

análogos de los planos YZ, se corresponden con cuatro grandes zonas bastante bien diferenciadas, con valores modulares de las componentes de la velocidad (mostradas u y w) y de la temperatura potencial (θ) que, según las escalas adjuntas para cada gráfica, son suficientemente diferentes.

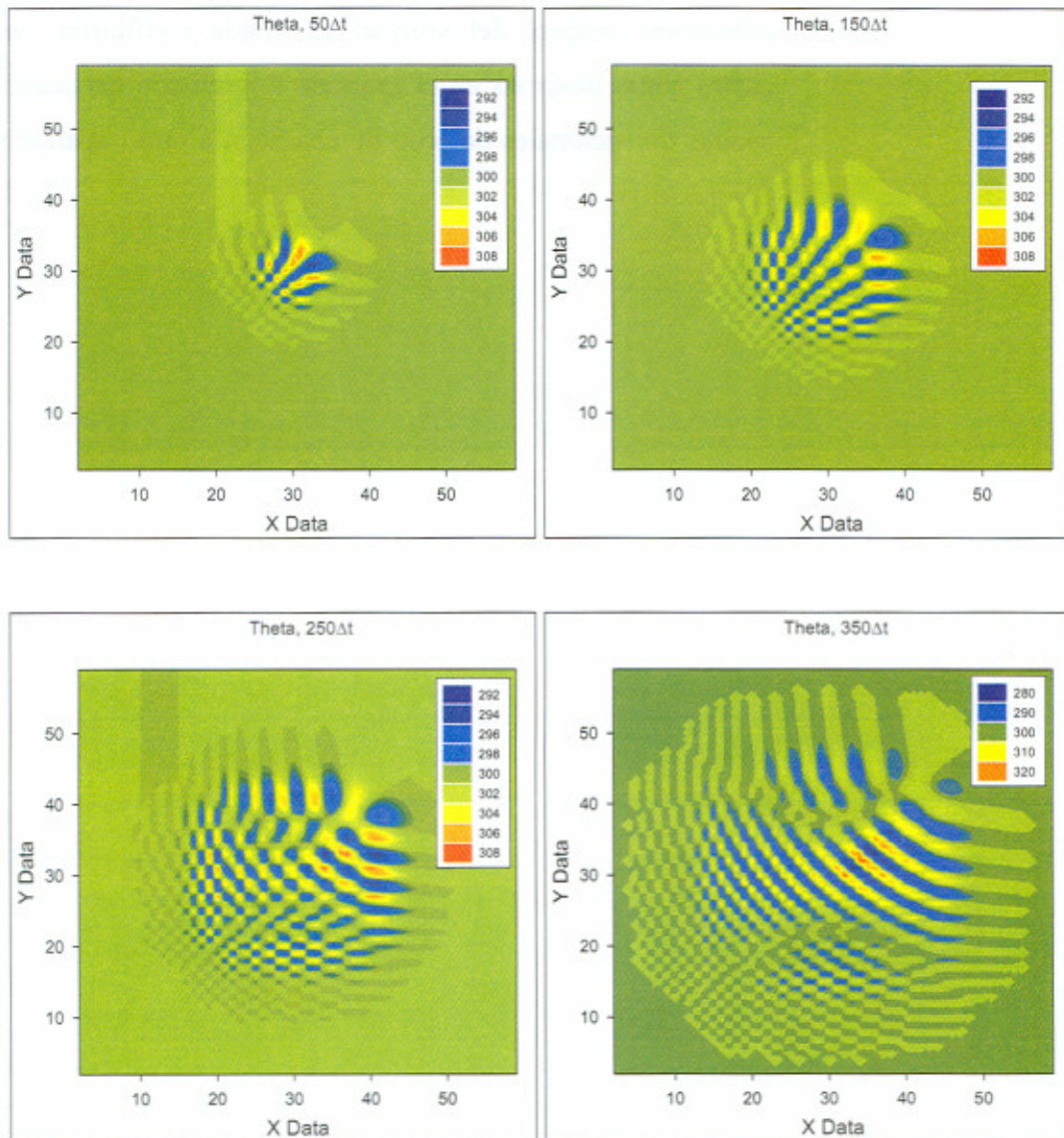


Fig. VI.45- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY. Se muestra la temperatura potencial θ desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

- d) Las zonas descritas en el apartado anterior se encuentran delimitadas a través de mínimos de las variables

correspondientes e incluso valores numéricos cercanos a los que presenta la malla en zonas no perturbadas.

- e) Queda una zona interna de comportamiento diferente al descrito en los apartados anteriores, de observación relativamente nítida en algunas variables, y que se corresponde con el entorno de la zona central de la malla (ubicación original del vórtice) en donde confluían las cuatro zonas descritas en el apartado c junto con las cuatro bandas transicionales de paso de una zona a otra, apartado d.

VI.2.9 PERTURBACIONES TURBULENTAS. TERCERA FASE.

Las Figuras VI.46, 47 y 48 corresponden a las evoluciones temporales de las perturbaciones turbulentas de la velocidad para las componentes u' y w' y de la temperatura potencial θ' . De igual manera que ha ocurrido con otras figuras presentadas hasta ahora en esta memoria, éstas tienen un comportamiento semejante a las ya mostradas, es decir, reproducen en cierta medida lo observado para las componentes de la velocidad y la temperatura potencial pero con escalas cuantitativas menores ajustadas a las propias perturbaciones turbulentas.

Sin intención de reproducir una por una las propiedades descritas en otros apartados digamos, a título de ejemplo, que el efecto observado en la gráfica de u para $350\Delta t$ en la Figura VI.39 se ve reproducido, aunque no exactamente, en la misma gráfica para la Figura VI.46, concretamente la división en tres zonas de actividad turbulenta diferenciable mediante la posible subdivisión del vórtice establecido en tres. Alguna diferencia es posible encontrar, ya que las magnitudes u' , w' y θ' no son propiamente u , w y θ . Así por ejemplo, este efecto se observa ahora en las Figuras VI.45, 46 y 47 a partir de las gráficas $150\Delta t$, lo que pone de manifiesto que ciertas características, sobre todo de carácter turbulento, son mucho más apreciables cuando trabajamos con las perturbaciones turbulentas de las componentes de la velocidad.

Una característica cuantitativa muestra que las perturbaciones turbulentas hasta $250\Delta t$ no superan el 2% y el 10% hasta $350\Delta t$. La variable que presenta un peor comportamiento, acorde con el comentario h, realizado en la Figura VI.39, es la tercera componente de la velocidad (w'), pese a la imposición de las condiciones de estabilidad de las soluciones del modelo, es decir el modelo pierde validez progresivamente y de forma diferencial para las distintas variables calculadas. Estamos referenciando con frecuencia aspectos cualitativos que al meno informan del comportamiento de esas variables.

Los análisis mostrados en la Figura VI.42 sobre elongaciones de áreas de influencia son también aplicables para estas perturbaciones turbulentas.

Las figuras correspondientes a los planos horizontales, XY, mostradas para los mismos momentos de integración hasta ahora, no presentan aparentemente ninguna característica especialmente diferenciadora digna de ser mencionada. Baste con dejar establecido que dichas figuras presentan un comportamiento cualitativo

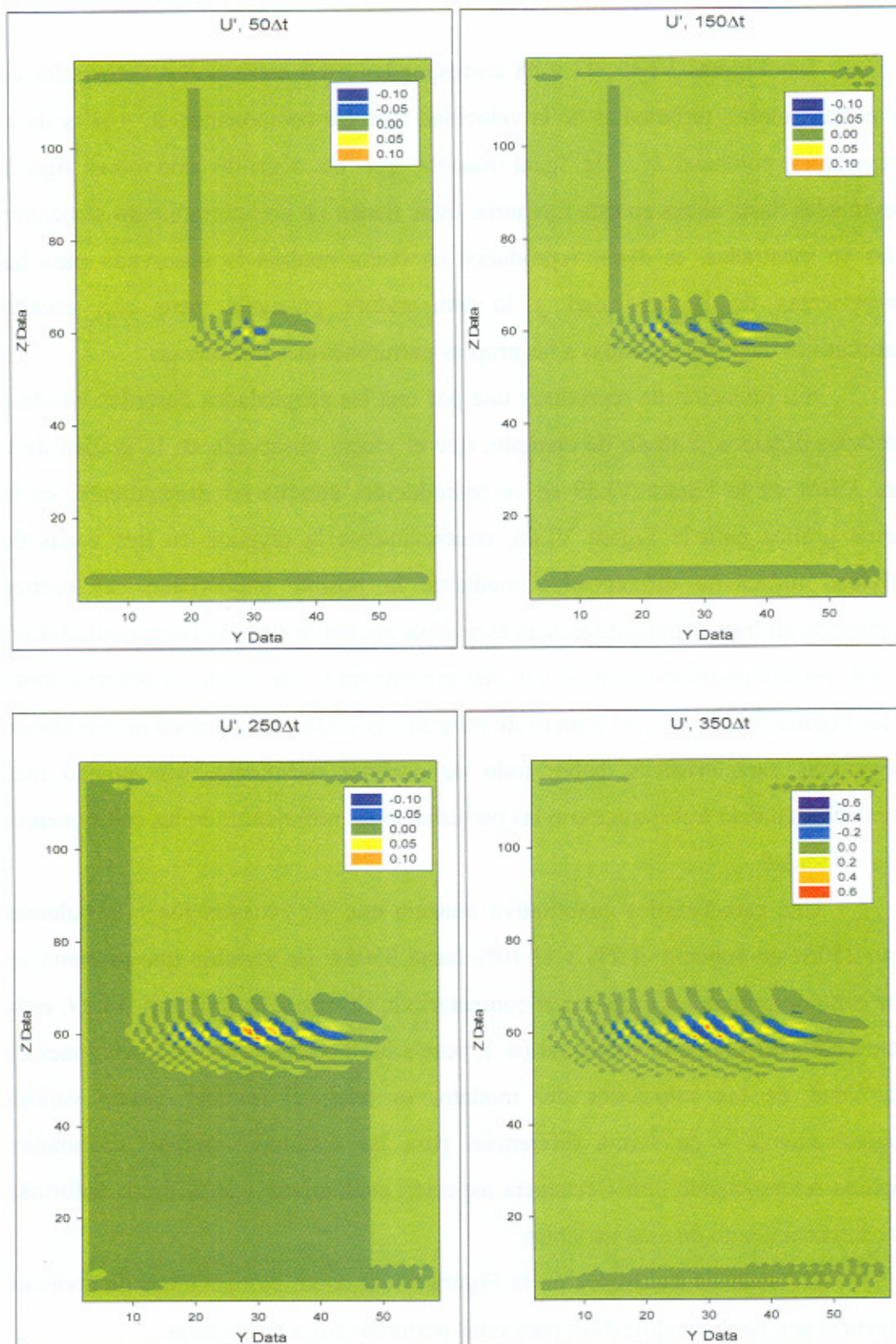


Fig. VI.46- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ . Se muestra la componente u' desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Efecto bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

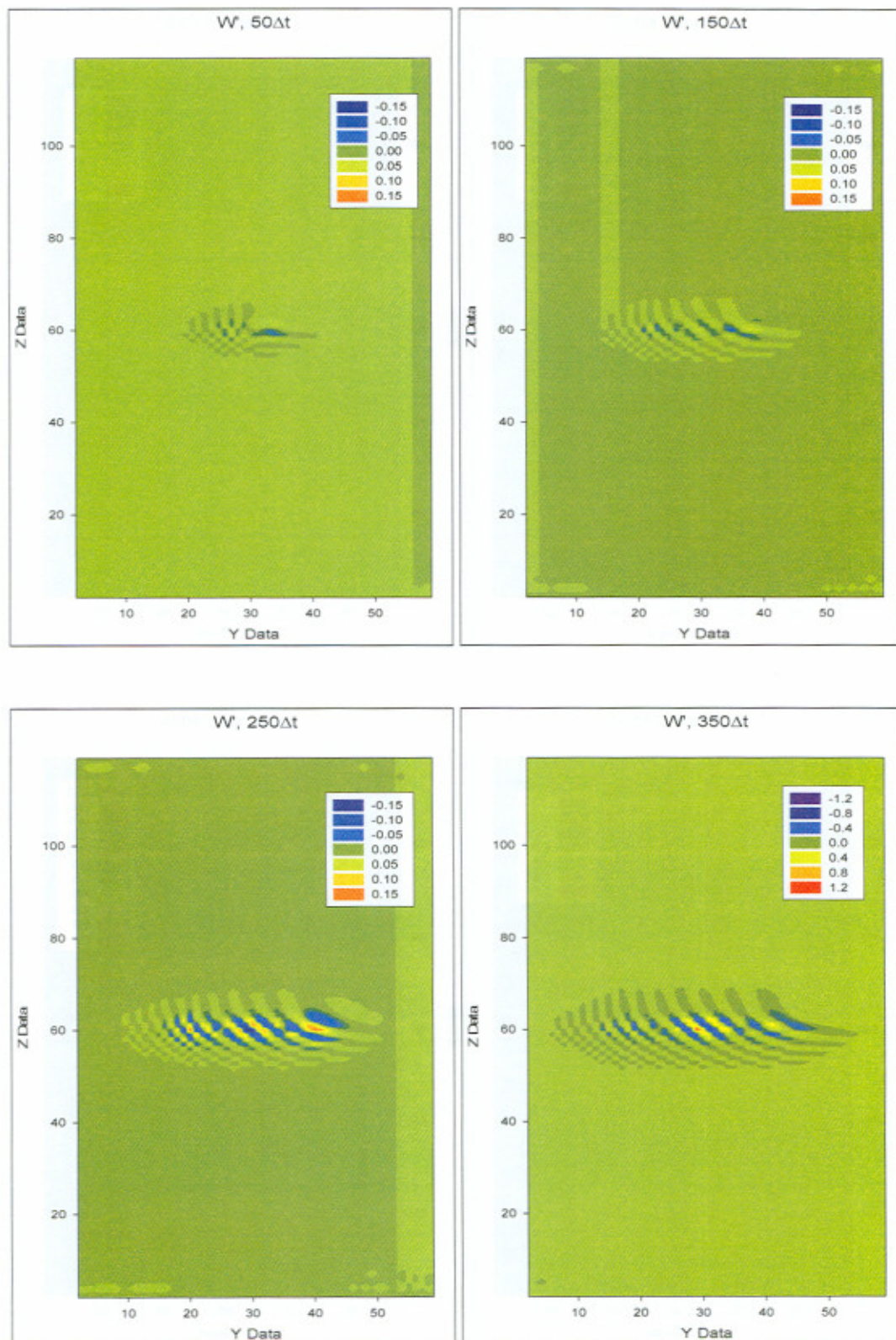


Fig. VI.47- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ . Se muestra la componente w' desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Efecto bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

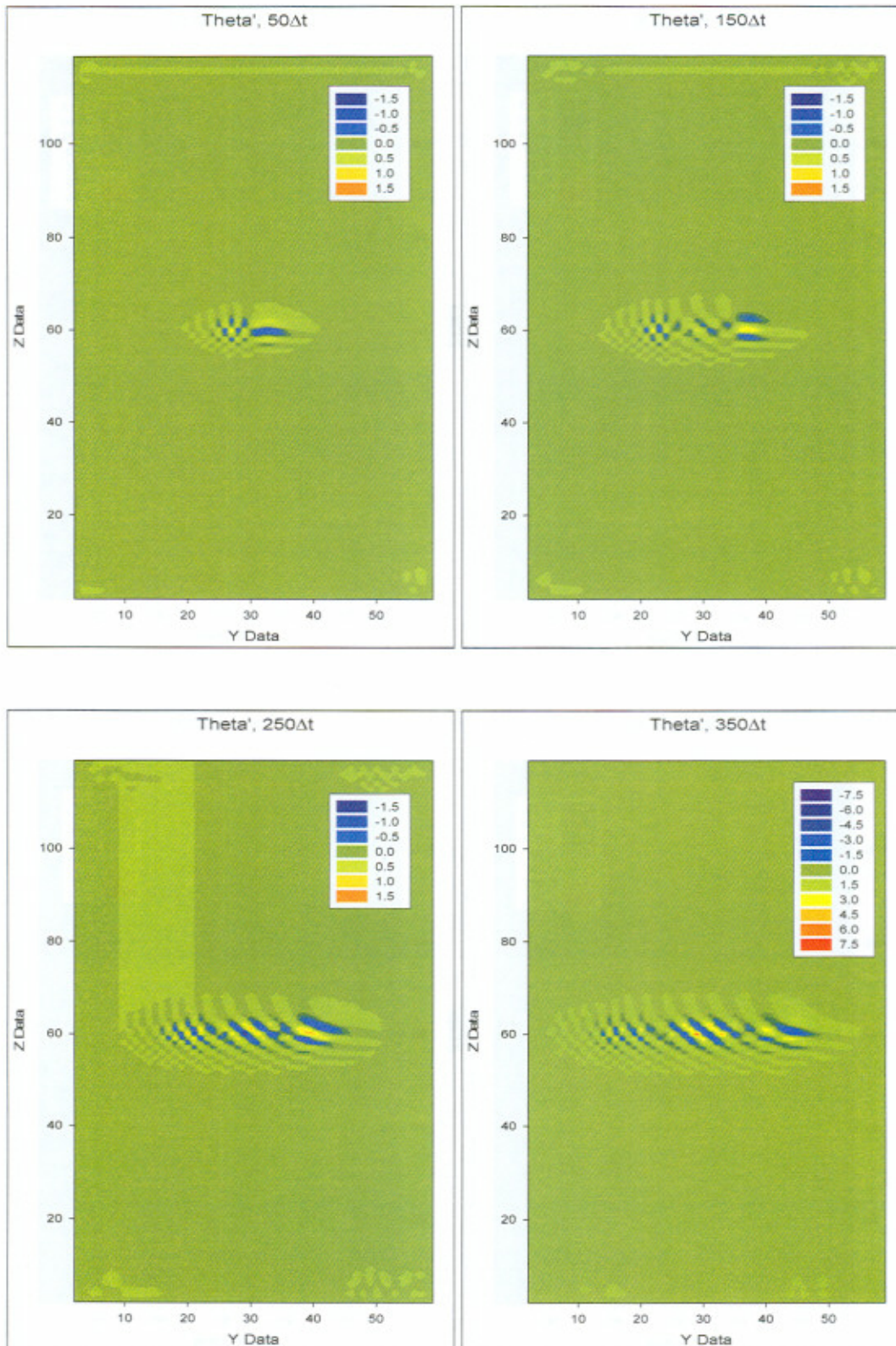


Fig. VI.48- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ. Se muestra la perturbación turbulenta de la temperatura potencial θ' desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Efecto bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

semejante al de las figuras VI.43, 44 y 45 y un comportamiento cuantitativo similar al de las figuras VI.46, 47 y 48. Sin embargo un estudio más detallado muestra (Figura VI.49) que la semejanza no es todo lo formal que pareciera, ya que hay una gran diferencia de desarrollo de zonas de valores mayores y menores que un promedio dado entre lo que se observa en u' y u .

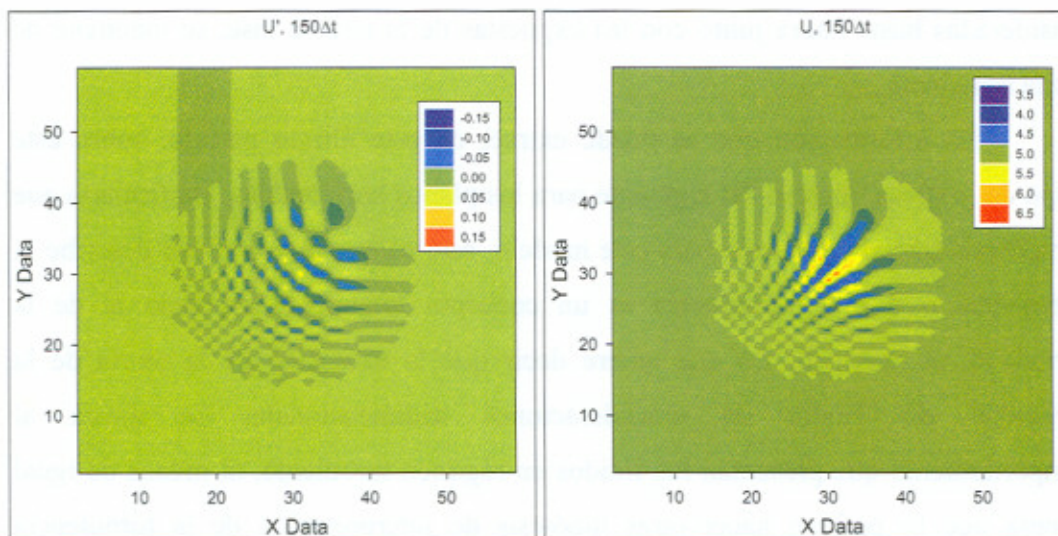


Fig. VI.49- Gráficas comparativas mostrando la diferencia de desarrollo de la componente u de la velocidad y su perturbación turbulenta. Momento de integración $150\Delta t$.

VI.2.10 COMPONENTES PUNTUALES DEL ROTACIONAL. TERCERA FASE.

Las Figuras VI.50, 51 y 52 muestran las evoluciones temporales de las tres componentes del rotacional de la velocidad (vorticidad) en planos verticales YZ. El análisis de las mismas informa que la estructura de desarrollo, que se viene observando a lo largo de la segunda fase de integración para todas las variables consideradas hasta ahora junto con las expuestas de la tercera fase, se mantiene de forma semejante.

La información que se puede extraer de este último párrafo, sobre este grupo de gráficas, incluso del siguiente para los planos horizontales, confirmaría que la hipótesis inicial de trabajo para este modelo, esto es que la vorticidad describe la turbulencia o que la turbulencia es un concepto totalmente asociado al de la vorticidad, es acertado. Lo que quiere decir que la extensión de la teoría de la vorticidad de Taylor en consideraciones tridimensionales se ajusta al comportamiento que presentan los fluidos en régimen turbulento, al menos de igual manera que lo podrían hacer otras hipótesis de interpretación de la turbulencia (coeficientes de intercambio, longitud de mezcla, etc.). Como futuro trabajo de investigación cabría la posibilidad de realizar análisis comparativos entre las teorías hasta ahora utilizadas y la propuesta por esta memoria.

La práctica totalidad de los comentarios realizados hasta ahora, para este tipo de representaciones, se repite con estas variables tal cual y merecería la pena resaltar que las tres estructuras encontradas en torno a las gráficas para $350\Delta t$ son observables ahora a partir del paso $250\Delta t$ (salvo excepcionalmente en la componente z), aunque no con la nitidez con que lo presentarán las variables del rotacional perturbadas como se verá más adelante.

Obviamente las escalas cuantitativas no se corresponden con las utilizadas con las componentes de la velocidad, ya que ahora se está estudiando cocientes incrementales. Esta circunstancia se traduce en que el valor genérico para los puntos de malla alejados de las influencias del vórtice sea cero para las tres componentes. Este efecto se extiende, aún más, sobre el de dispersión numérica que sufrían las componentes de la velocidad y sus perturbaciones turbulentas en las cercanías del final efectivo de integración del modelo.

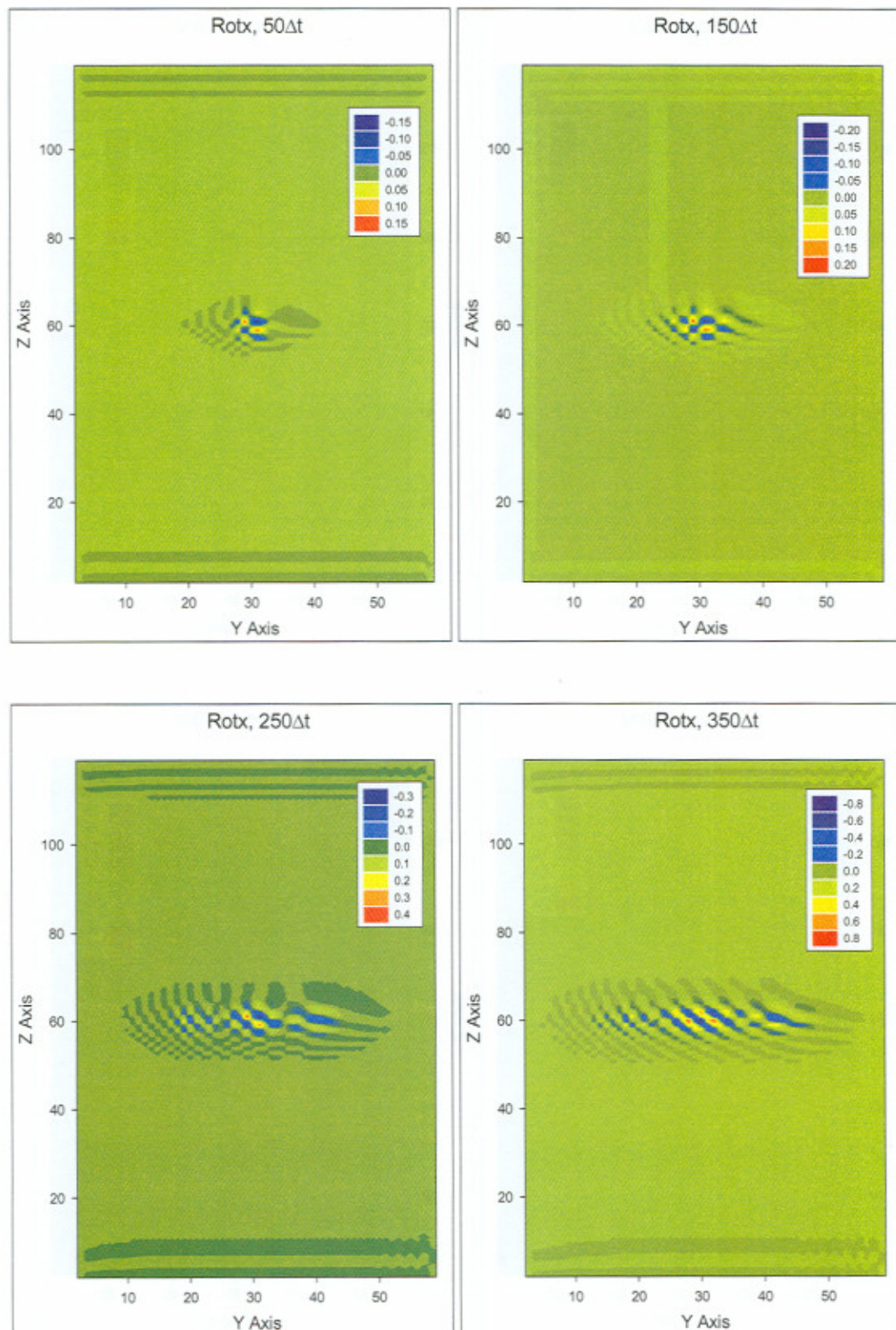


Fig. VI.50- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ . Se muestra la primera componente del rotacional de la velocidad ($Rotx$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Efecto bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

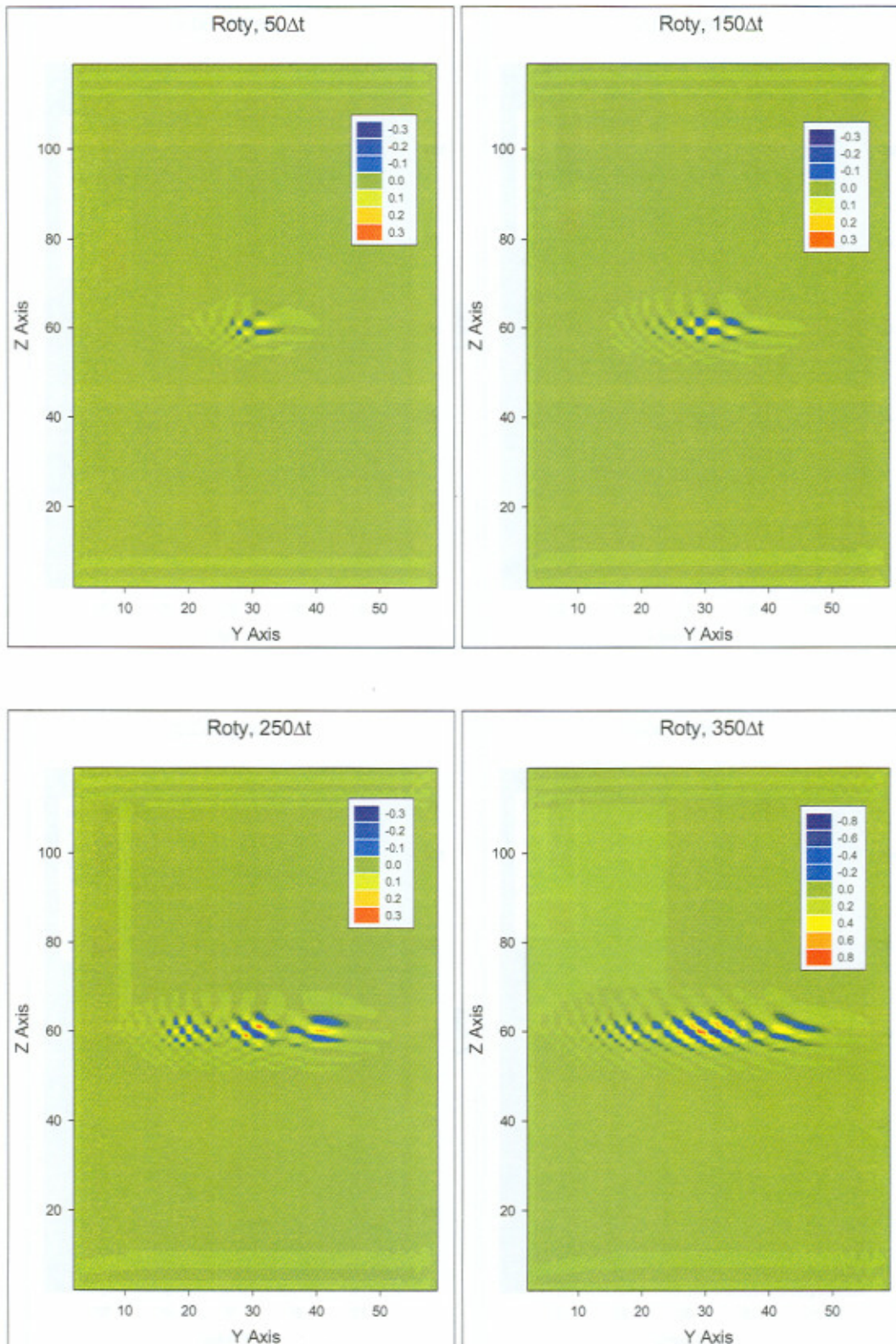


Fig. VI.51- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ. Se muestra la segunda componente del rotacional de la velocidad (Roty) desde el instante 50 Δt hasta 350 Δt (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Efecto bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

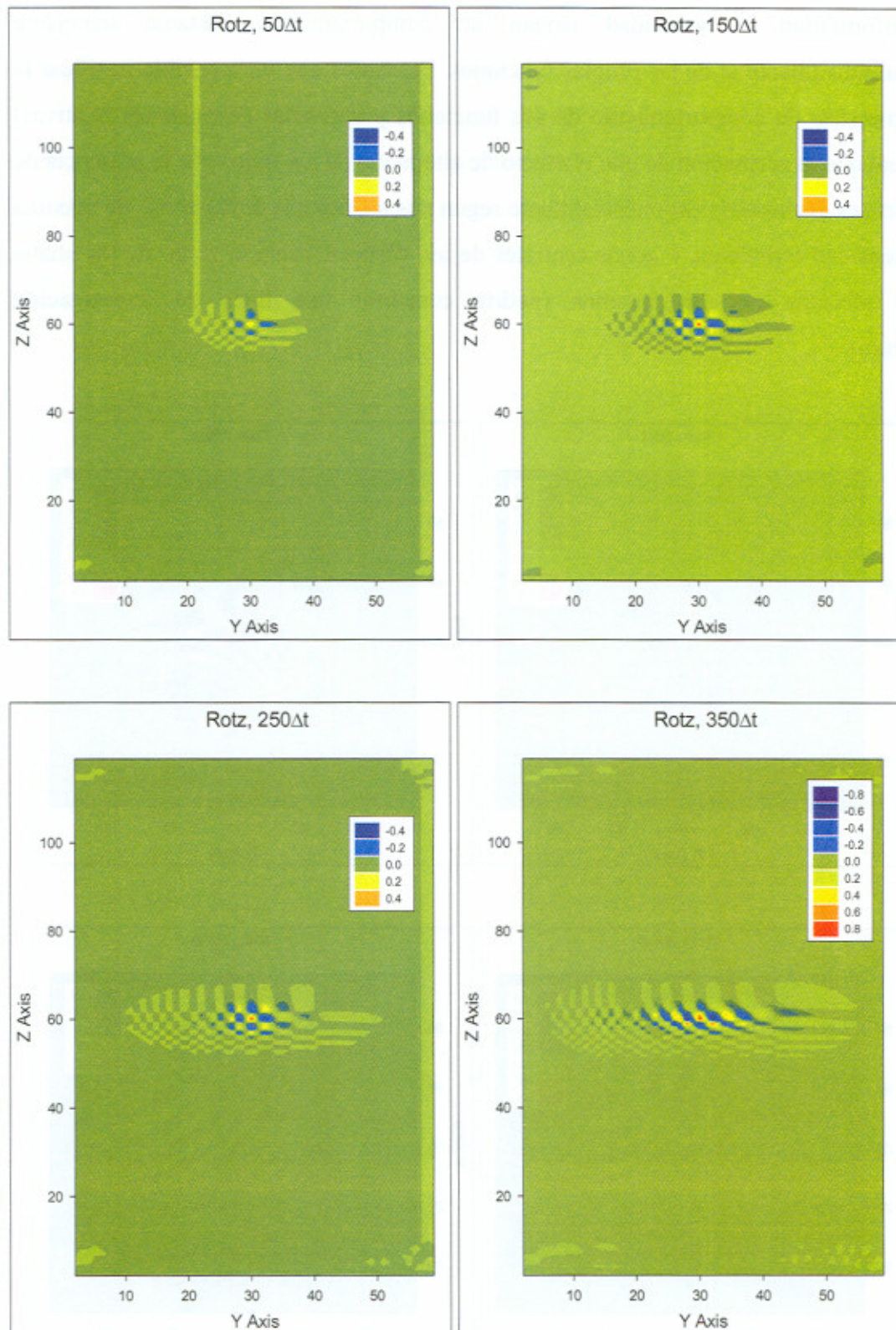


Fig. VI.52- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ. Se muestra la tercera componente del rotacional de la velocidad (Rotz) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3. Efecto bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

Sorprende algo que las variaciones relativas de las distintas funciones que conformarían la velocidad tengan un comportamiento bastante semejante cualitativamente al de las propias funciones. Pensamos que sería posible justificar la semejanza de comportamiento de sus funciones y derivadas (variaciones relativas) mediante la aceptación de que el efecto de alteración de los flujos por la presencia de vórtices disminuiría exponencialmente según nos alejásemos de las zonas de máxima intensidad turbulenta, o zonas centrales de los vórtices, hacia la zona de la malla no afectada por los mismos (podría constituir una línea de investigación futura).

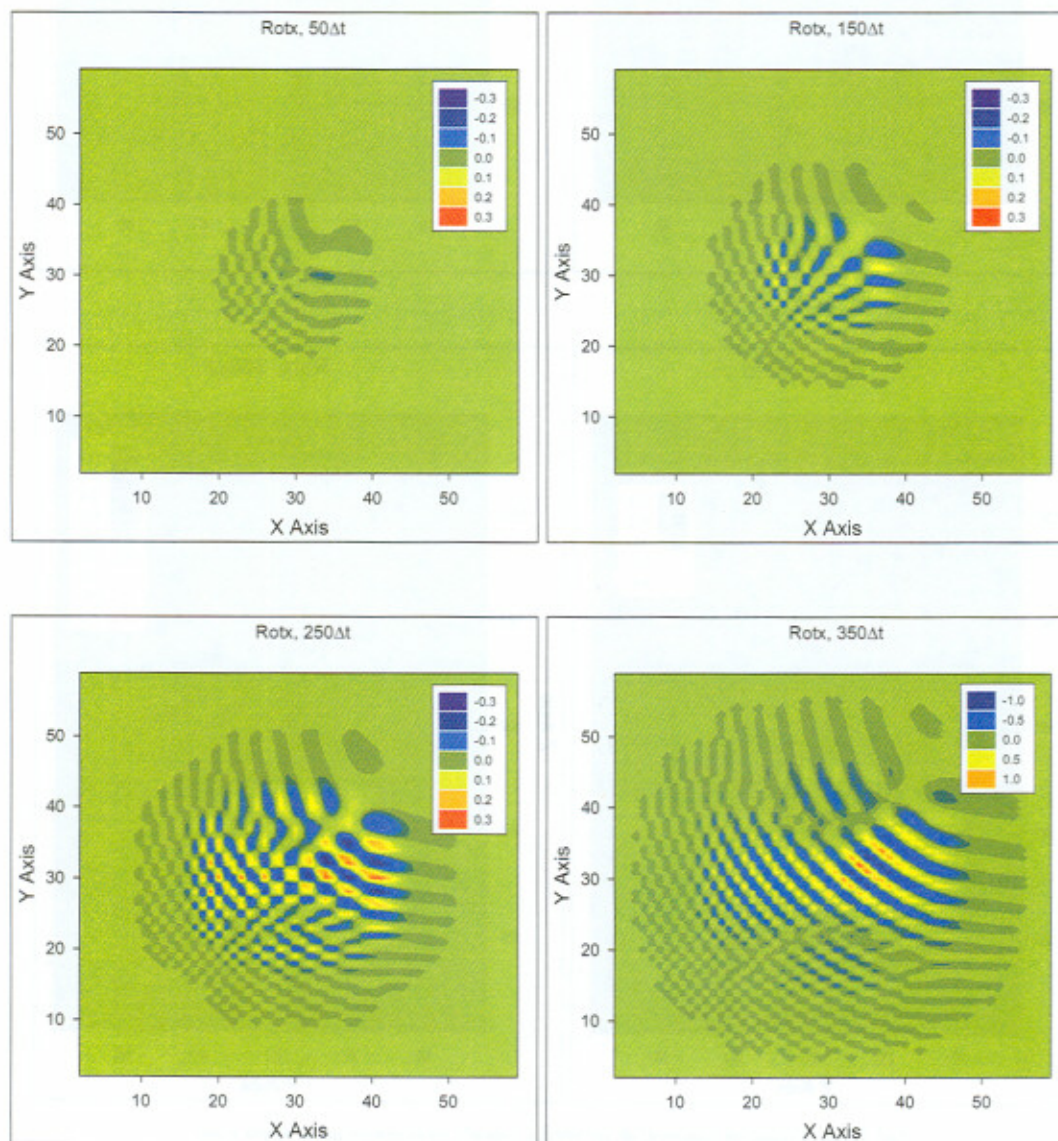


Fig. VI.53- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY. Se muestra la primera componente del rotacional de la velocidad ($Rotx$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2.

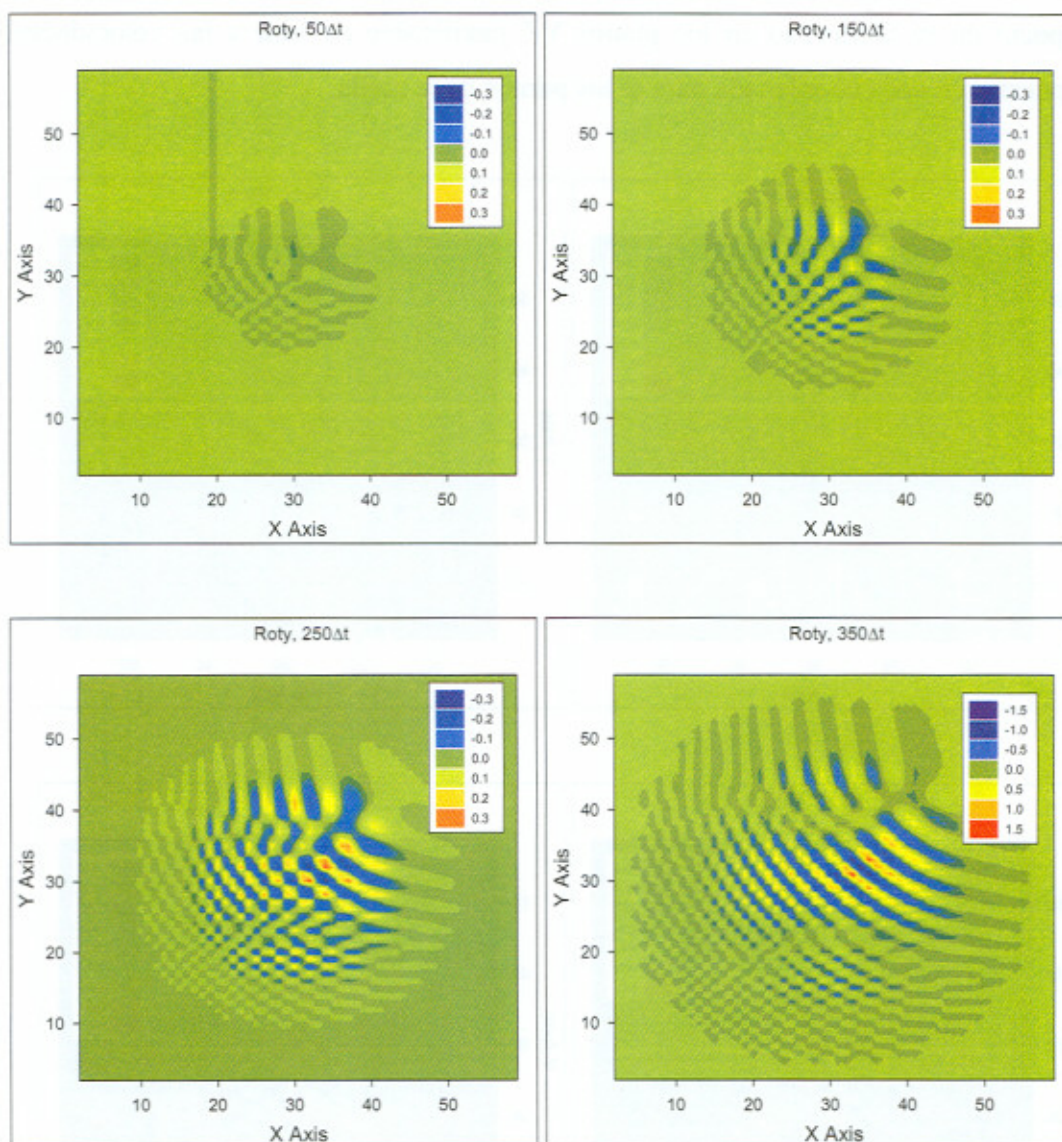


Fig. VI.54- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY. Se muestra la segunda componente del rotacional de la velocidad (Roty) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

Las Figuras VI.53, 54 y 55 corresponden al comportamiento y evolución de las mismas variables que las tres figuras anteriores en sus versiones en planos horizontales XY. Al igual que con las Figuras VI.43, 44 y 45, se reproducen prácticamente los mismos comentarios con la única observación añadida de que la división en las diferentes zonas afectadas por el vórtice aparecen en momentos de integración anteriores, significando con ello que estas variables que ahora representamos detectan con antelación los efectos del vórtice que aparecerían en las componentes de la velocidad. Insistimos en el hecho del crecimiento por igual en las

dimensiones presentes en las gráficas de estas figuras, esto es x e y , diferencial respecto de lo observado en los planos YZ justificable en base a las velocidades impuestas en cada coordenada para el los puntos de la malla.

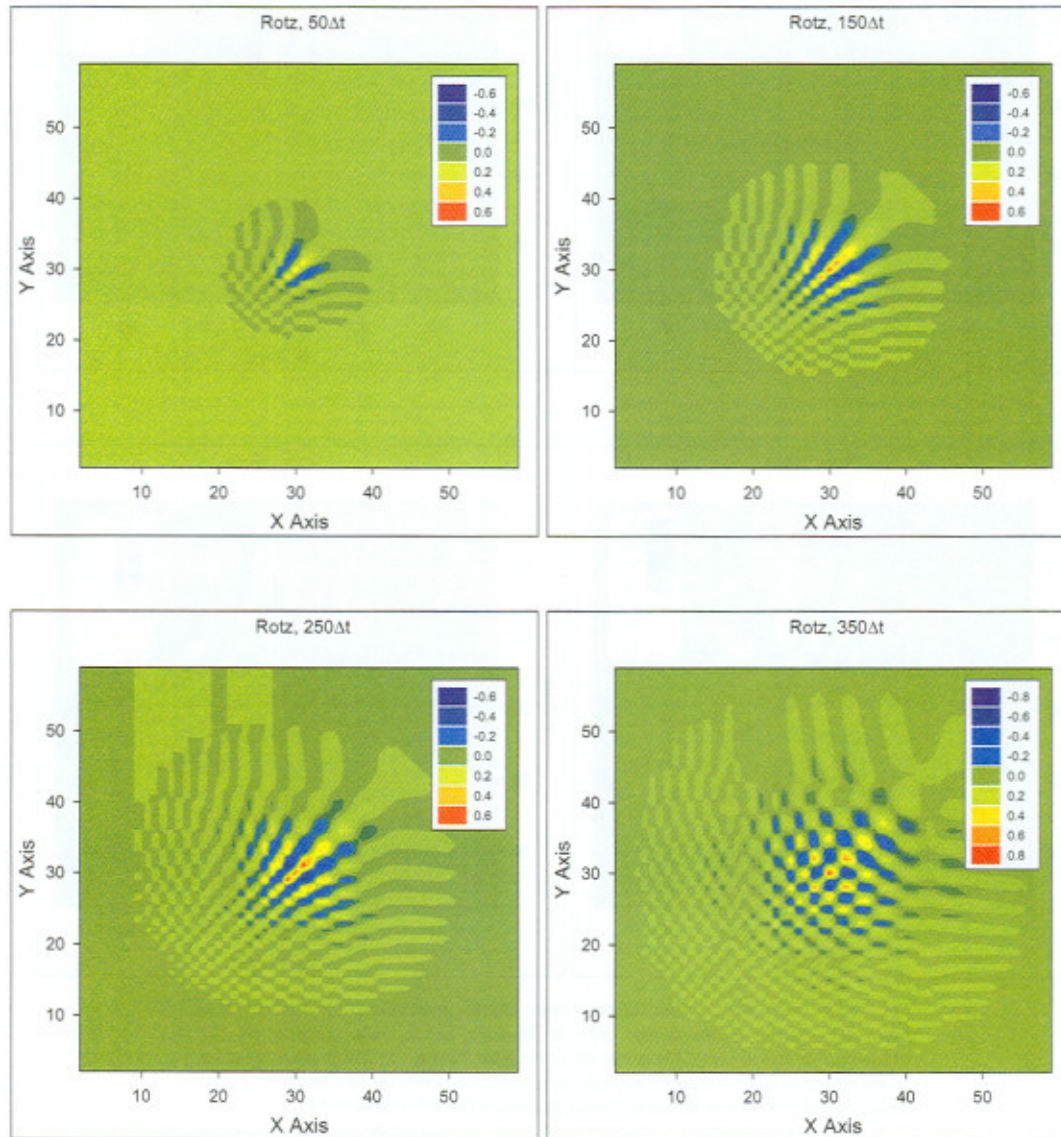


Fig. VI.55- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY . Se muestra la tercera componente del rotacional de la velocidad ($Rotz$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Las bandas anómalas tienen la misma justificación que para la Figura VI.3.

VI.2.11 PERTURBACIONES TURBULENTAS DEL ROTACIONAL. TERCERA FASE.

Las Figuras VI.56 a 61 muestran el efecto concreto de perturbación turbulenta para las componentes del vector vorticidad propuestas como términos nuevos, en planos verticales YZ y horizontales XY, que esta memoria está presentando para el estudio de la turbulencia. Además de verificar la práctica totalidad de las observaciones que venimos presentando cabría destacar, para este grupo de figuras, que los momentos de integración en los que se observa por primera vez la pérdida de identidad como vórtice único, en pro de avanzar hacia la subdivisión de comportamientos, tiene lugar, para la perturbación turbulenta de la vorticidad (vorticidad turbulenta), incluso en los momentos de integración $150\Delta t$ para las componentes x e y.

La componente z no presenta comportamientos similares, en cuanto a lo que a las subdivisiones en zonas se refiere; la base sobre la que se sustentaría esta diferencia de comportamientos radicaría en el propio establecimiento inicial del problema, ya que las componentes x e y del rotacional operan sobre las variaciones incrementales de las componentes v y w y u y w en cada caso, mientras que la componente z lo hace sobre u y v exclusivamente (recordemos que las condiciones impuestas para la velocidad eran 5, 5, 0'5 para todos los puntos de la malla y el vórtice con pequeñas variaciones sobre éstas). Además, cabría considerar también que la componente z del rotacional, o de su perturbación, por localizarse en planos horizontales no sufriría el efecto de las variaciones de la temperatura potencial presentes en los términos ascensionales, mientras que ambas componentes, x e y, sí lo sufrirían a causa de que ambas contienen la componente vertical de la velocidad.

Por último, la cuantificación de los efectos, según se observa en las diferentes figuras expuestas, mostrando valores extremos respecto de un valor medio nulo, como es lógico, crecen con el paso del tiempo. Este efecto está, lógicamente, asociado a la dispersión progresiva de las soluciones del problema que, si hubiéramos continuado mostrando pasos de integración por encima de $400\Delta t$, además de llenar toda la malla de perturbaciones, habría perdido validez el modelo pese a que la finalización está impuesta precisamente por el cumplimiento de las condiciones de estabilidad y CFL.

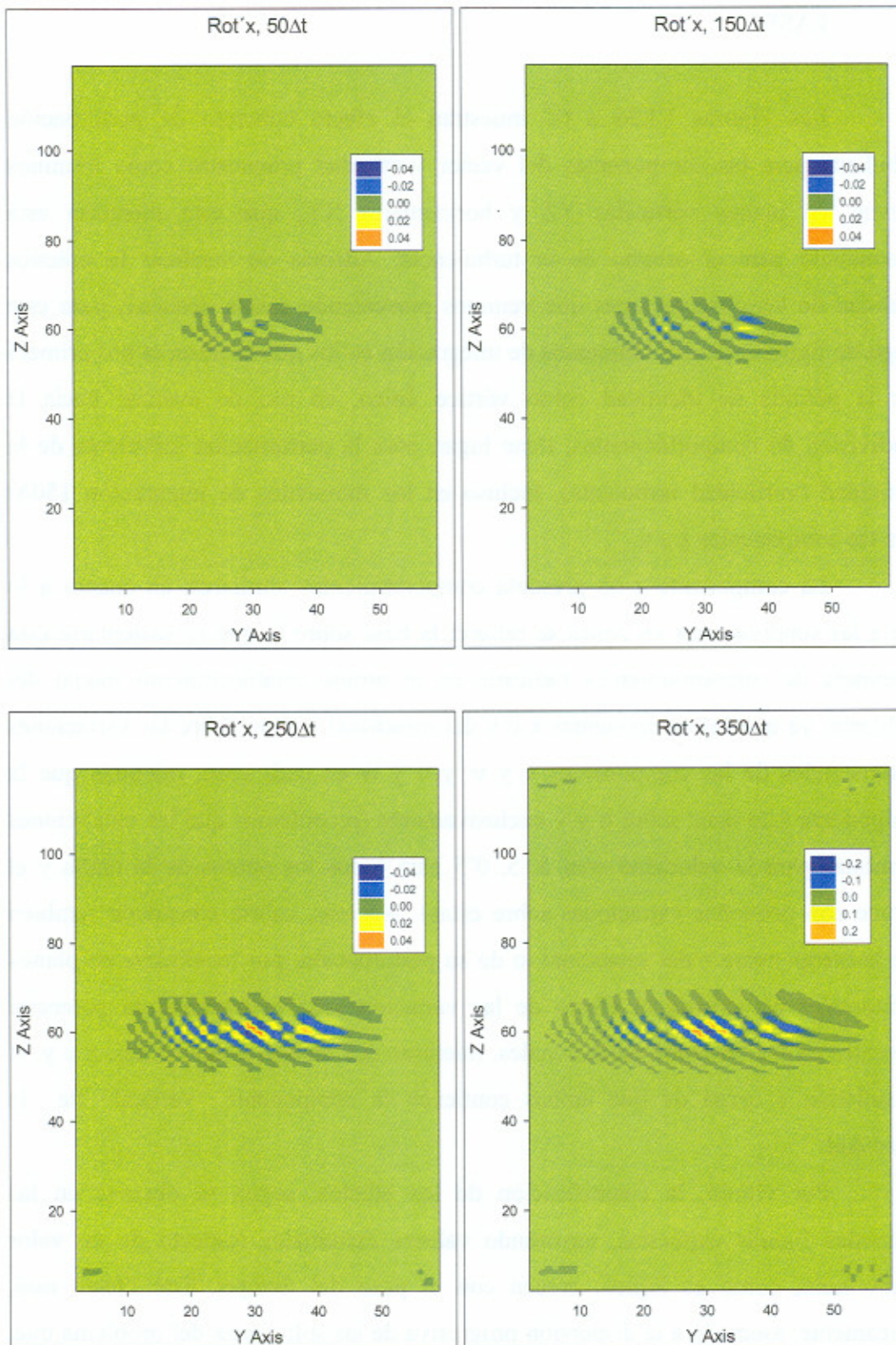


Fig. VI.56- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ. Se muestra la primera componente de la perturbación turbulenta del rotacional de la velocidad ($Rot'x$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Efecto de los bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

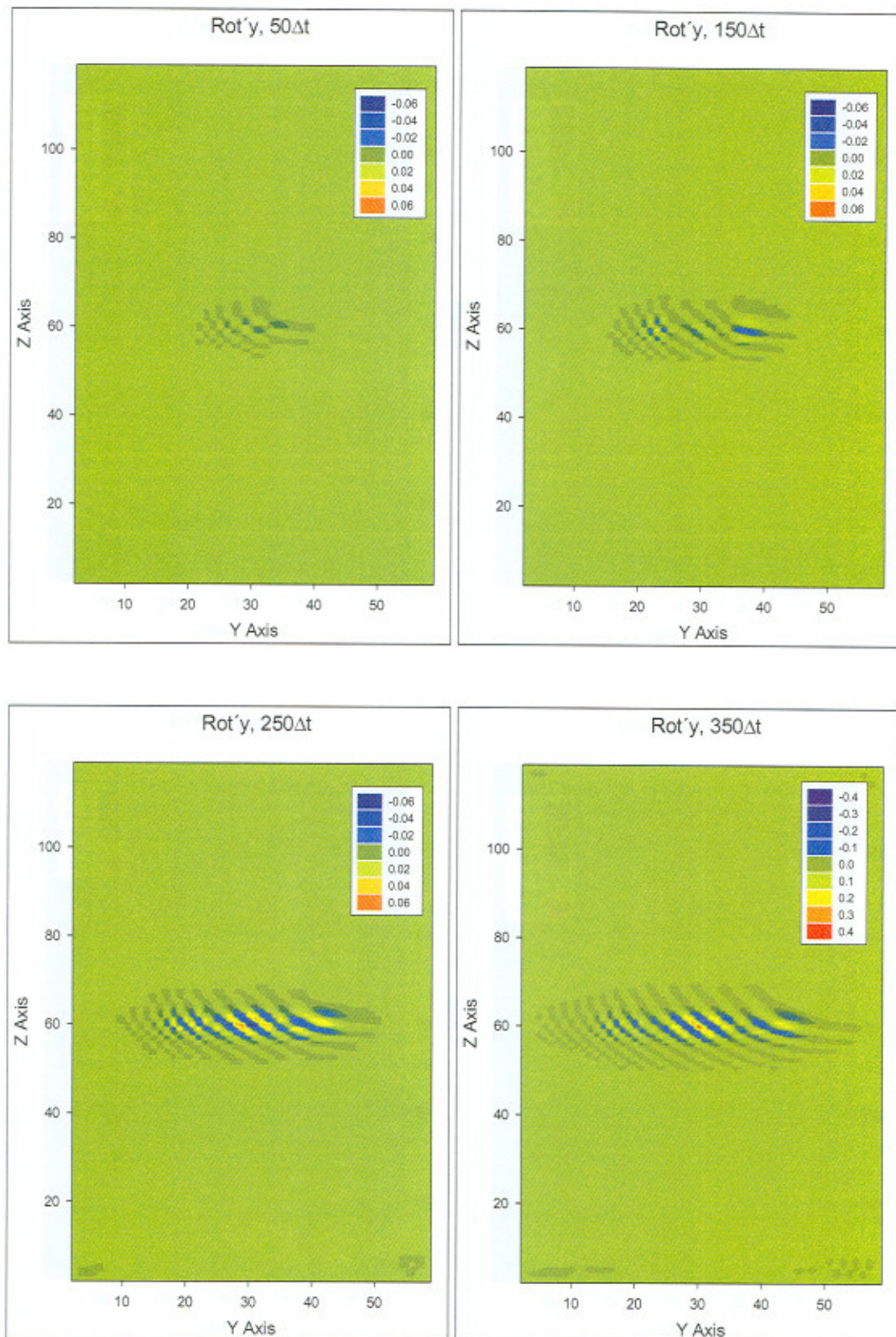


Fig. VI.57- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ. Se muestra la segunda componente de la perturbación turbulenta del rotacional de la velocidad ($Rot'y$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Efecto de los bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

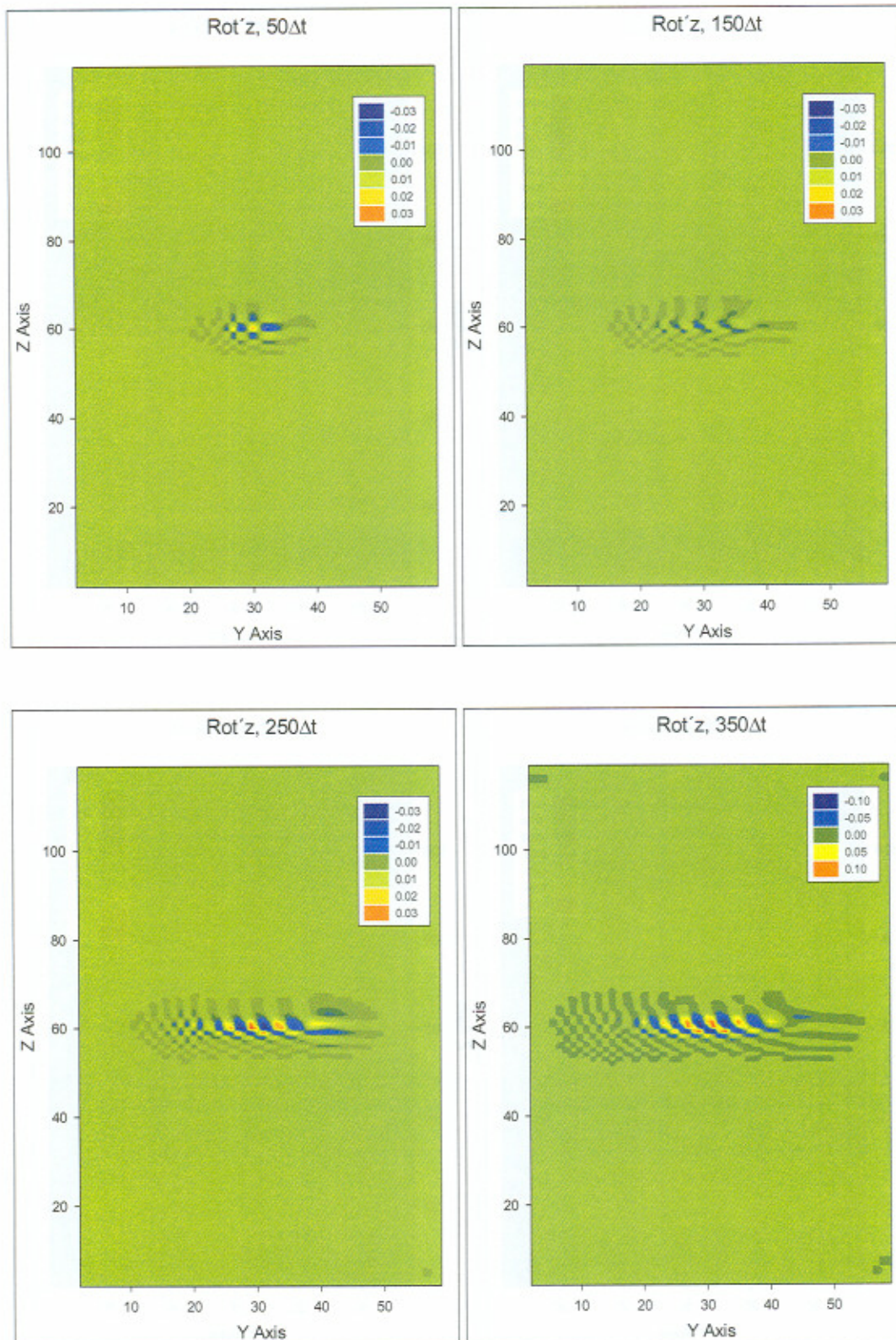


Fig. VI.58- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos YZ. Se muestra la tercera componente de la perturbación turbulenta del rotacional de la velocidad ($Rot'z$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2. Efecto bordes verticales referenciado en Figura VI.39.

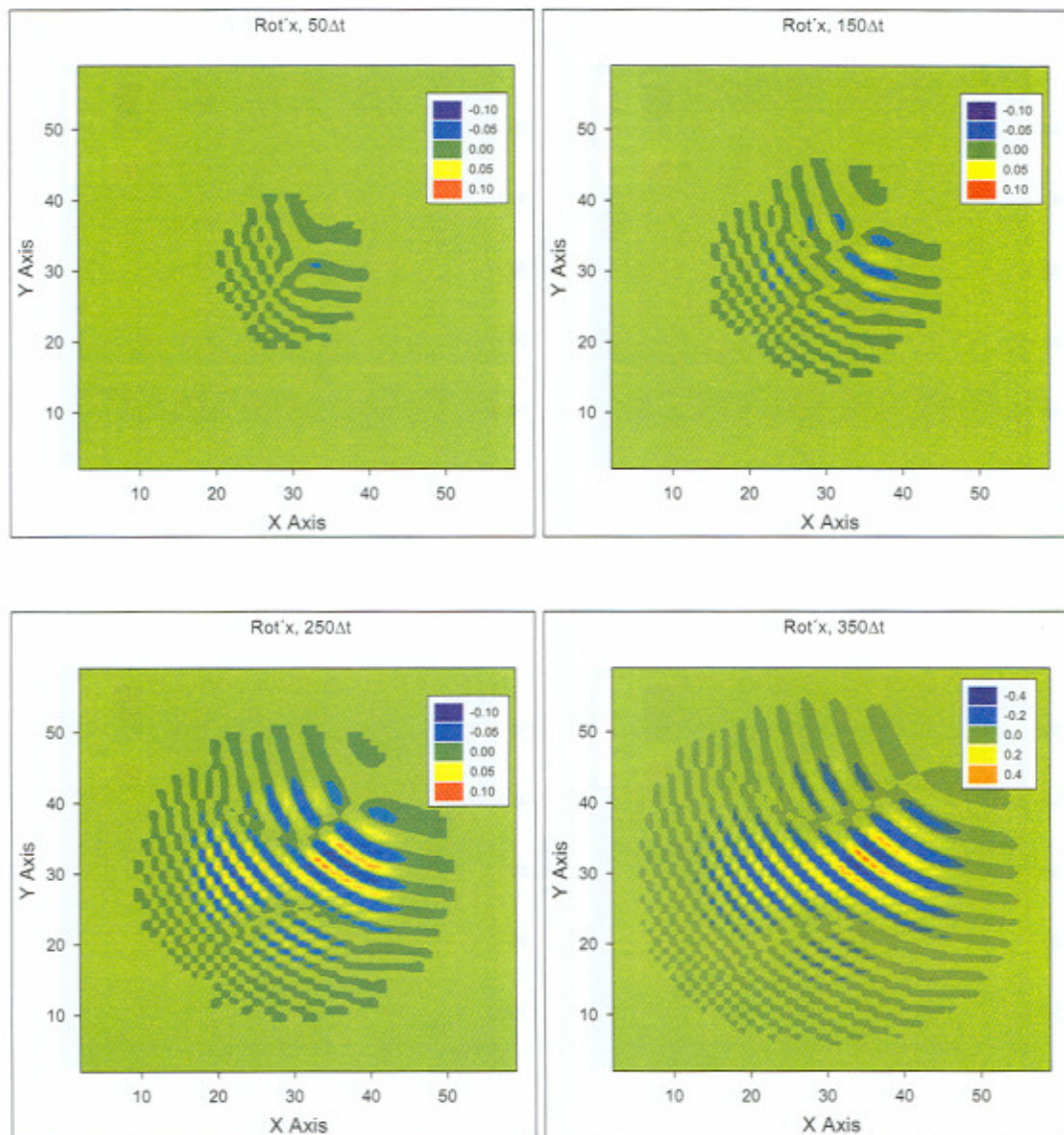


Fig. VI.59- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY . Se muestra la primera componente de la perturbación turbulenta del rotacional de la velocidad ($Rot'x$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2.

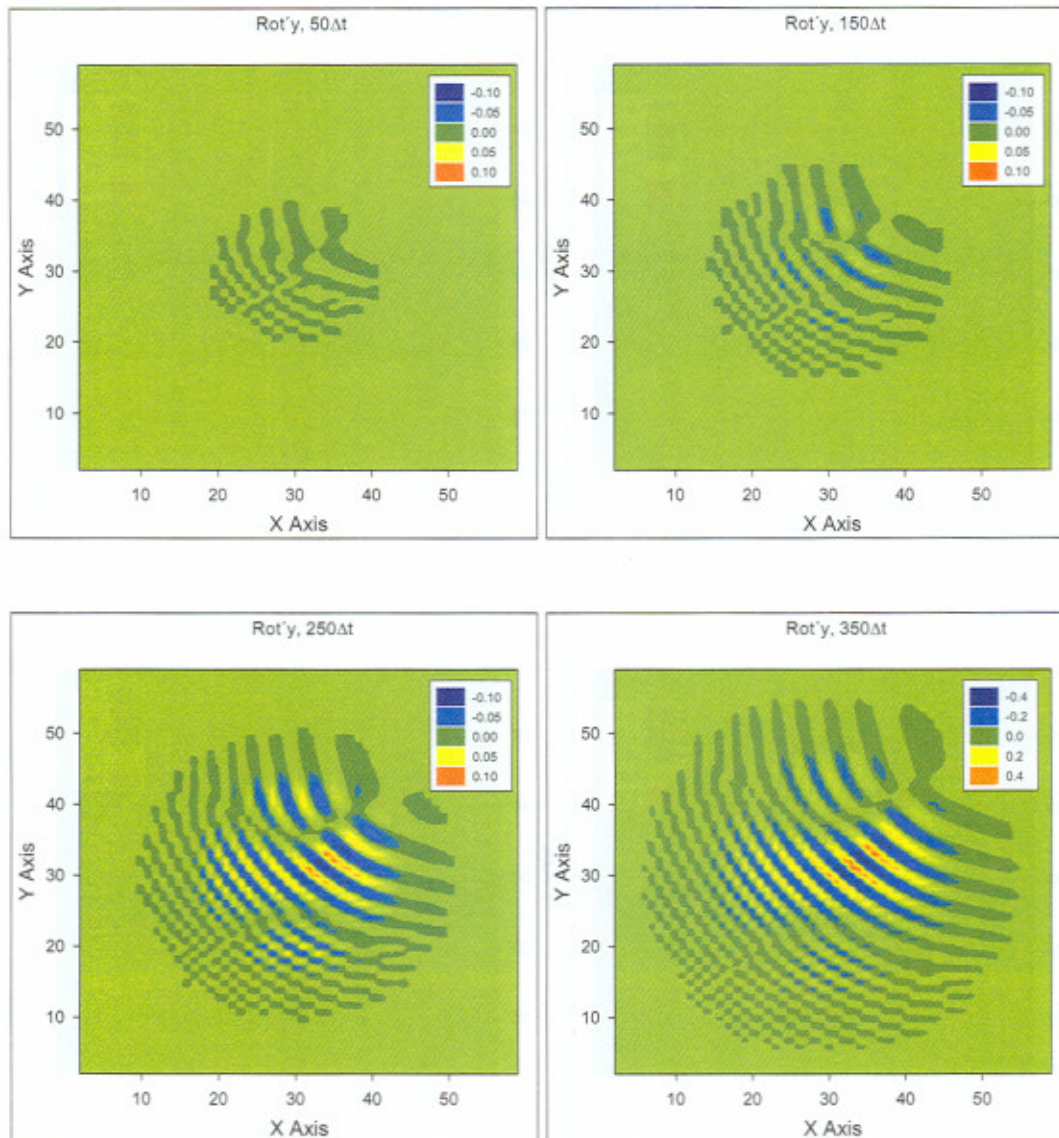


Fig. VI.60- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY . Se muestra la segunda componente de la perturbación turbulenta del rotacional de la velocidad ($Rot'y$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2.

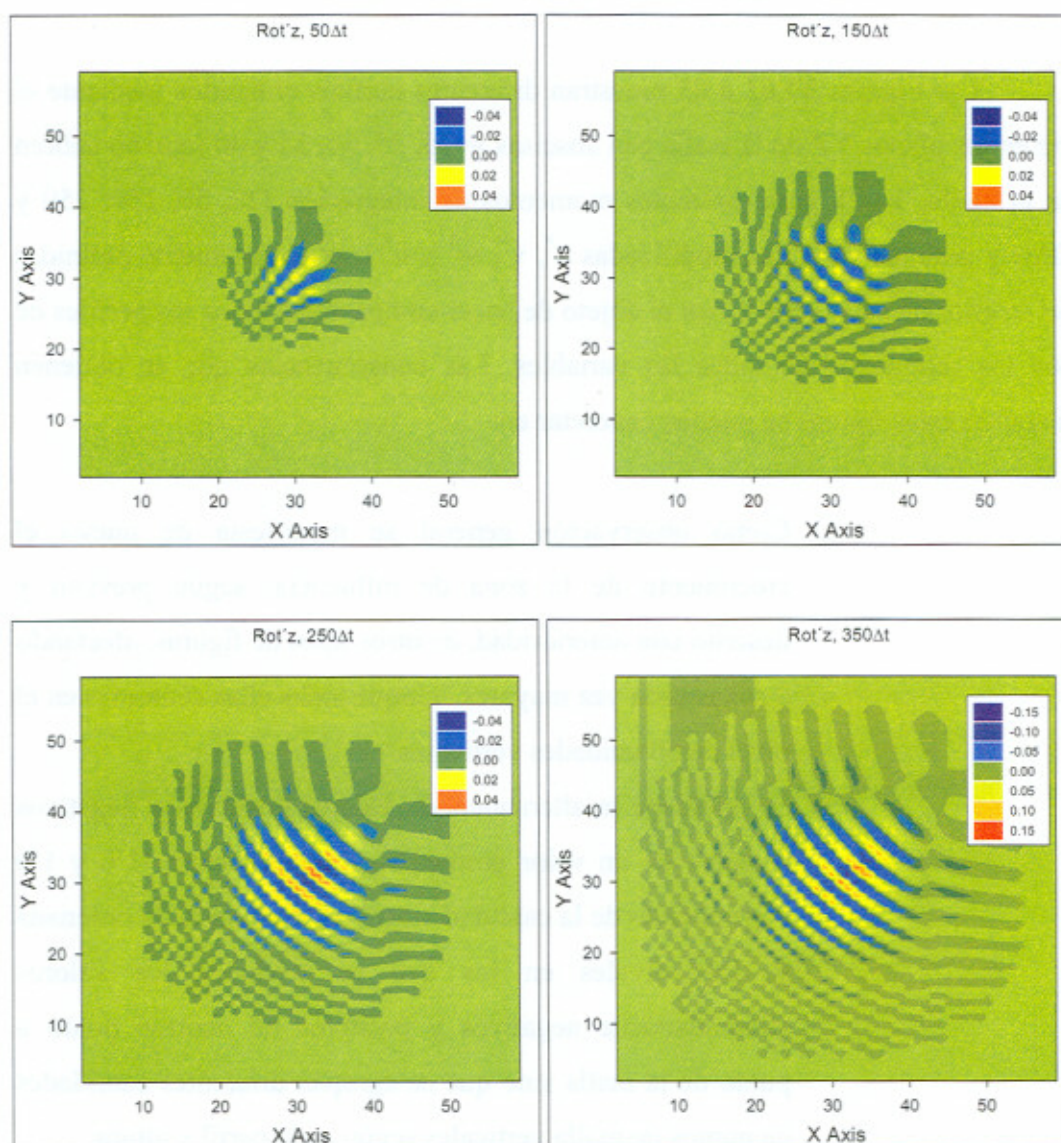


Fig. VI.61- Evolución temporal de un vórtice situado en el centro de la malla y sus zonas de influencia, en planos XY . Se muestra la tercera componente de la perturbación turbulenta del rotacional de la velocidad ($Rot'z$) desde el instante $50\Delta t$ hasta $350\Delta t$ (final efectivo de integración). Otros detalles se referencian en la leyenda de la Figura VI.2.

VI.2.12 EVOLUCIÓN DE PERFILES VERTICALES. PROCESO COMPLETO.

Las Figuras VI.62 a 65 muestran diferentes perfiles obtenidos mediante el corte en los planos YZ de la malla con abscisas $y=20, 25, 30, 35$ y 40 (que no cubren toda la malla, 1-60), para diferentes momentos de integración (20, 50, 150, 250 y $350\Delta t$) y para las variables modificadas u^* , v^* , w^* y θ^* convenientemente definidas en el interior de cada gráfica con el objeto de hacer comparables todos los perfiles de todos los momentos de todas las variables. Las consecuencias que se obtienen analizando estas figuras se pueden concretar en:

- a) Como observación general se manifiesta de nuevo el crecimiento de la zona de influencia, según previsto y descrito con anterioridad, en otros tipos de figuras, afectando a zonas cada vez mayores, aunque todas ellas centradas en el nivel de 60 unidades verticales.
- b) Se mantiene la alternancia de valores positivos y negativos respecto de un valor promedio que oscila entre $-1'0$ y $1'0$ dependiendo de la cantidad sustraída, función de la ordenada y . Los niveles en los que se producen los valores alternadamente negativos y positivos no ocurren punto a punto de la malla sino que se agrupan diferentes cantidades de puntos de malla verticales según cada perfil y altura.
- c) La observación de esta presencia alternada de valores mayores y menores que sus promedios justifica sobradamente la ausencia de perturbaciones armónicas. Desde los primeros comentarios (incluso en los de la tercera fase) han sido sistemáticamente eludidas ya que ninguna de las gráficas estudiadas hasta ahora (no sólo estas últimas) avalaría su existencia como consecuencia del modelo.

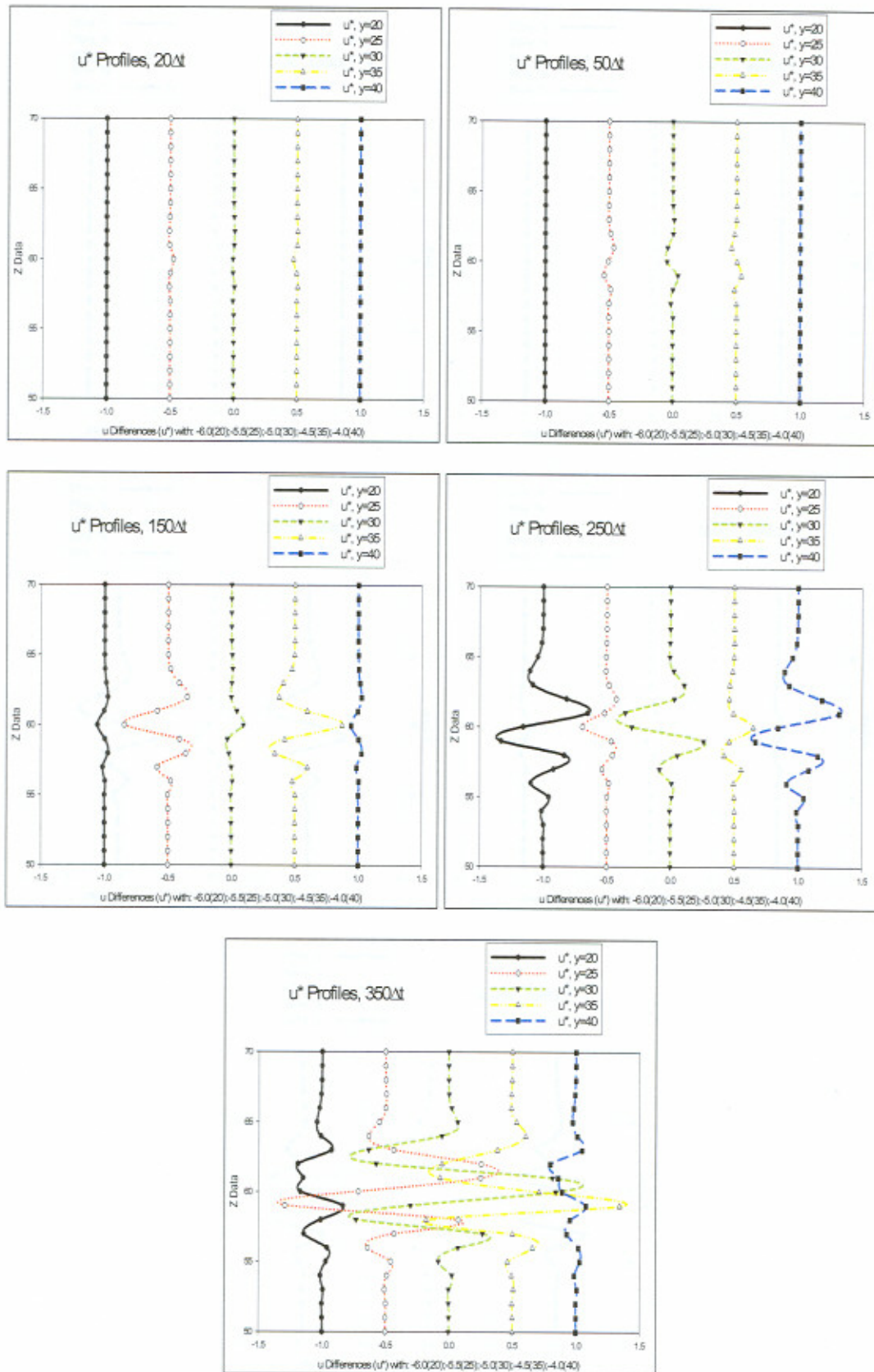


Fig. VI.62- Perfiles verticales de la primera componente de la velocidad (u^*) modificada mediante diferencias según se describe en el interior de las gráficas. Se muestra perfiles entre 50 y 70 unidades verticales de altura (vórtice centrado en 60) y para las abscisas (eje y) 20, 25, 30, 35 y 40. Momentos de integración 20, 50, 150, 250 y $350\Delta t$.

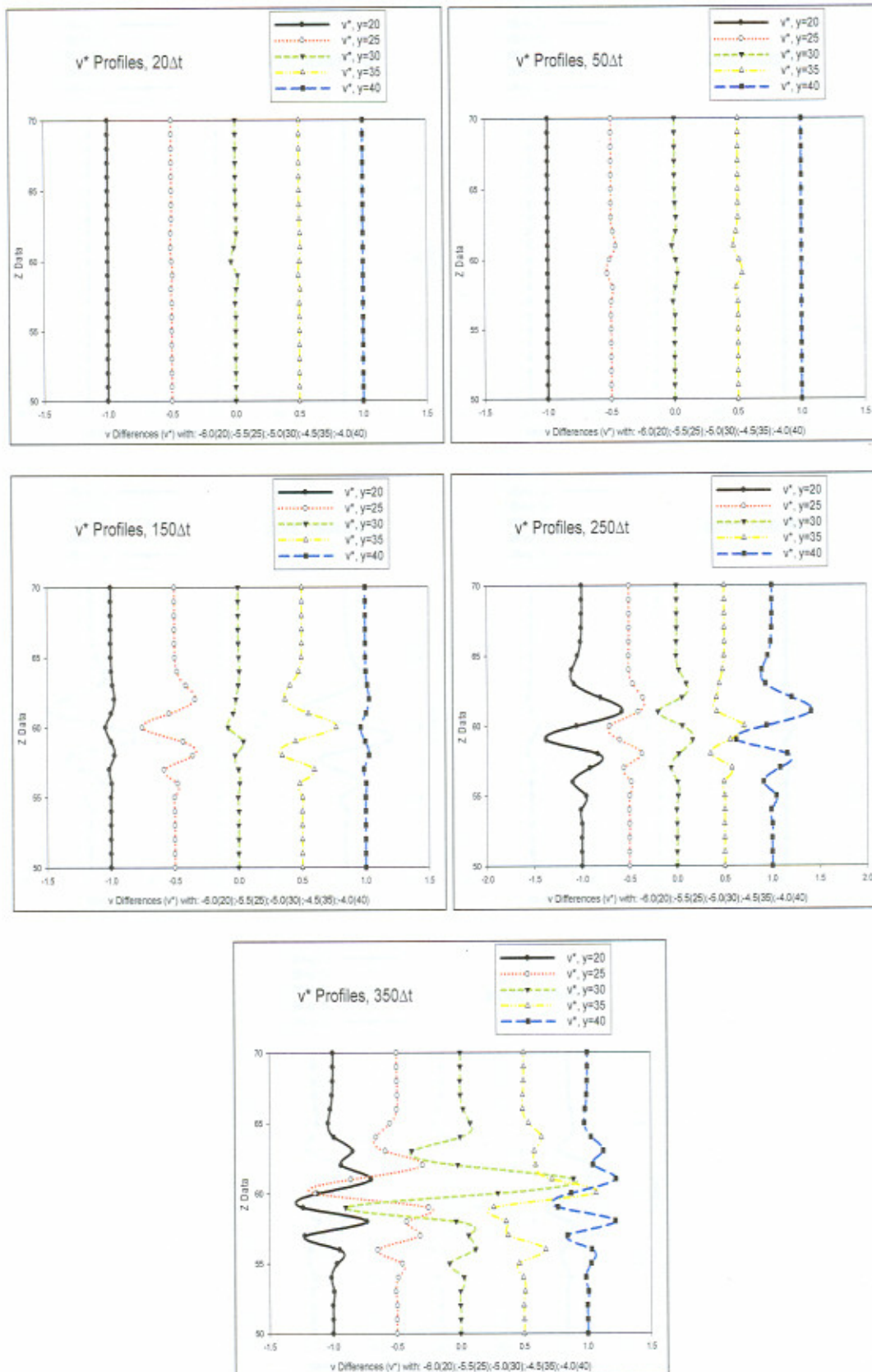


Fig. VI.63- Perfiles verticales de la segunda componente de la velocidad (v^*) modificada mediante diferencias según se describe en el interior de las gráficas. Se muestra perfiles entre 50 y 70 unidades verticales de altura (vórtice centrado en 60) y para las abscisas (eje Y) 20, 25, 30, 35 y 40. Momentos de integración 20, 50, 150, 250 y 350 Δt .

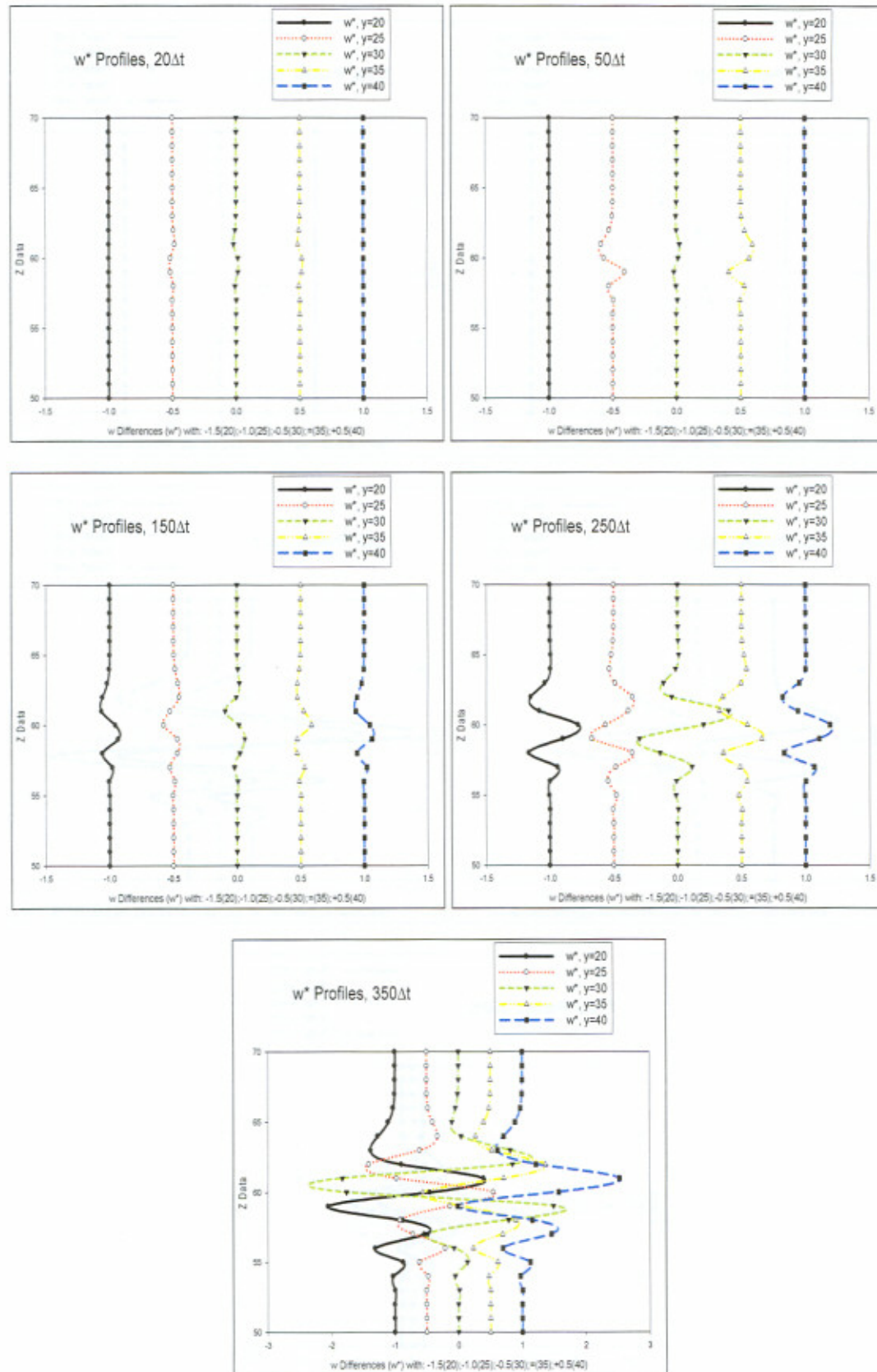


Fig. VI.64- Perfiles verticales de la tercera componente de la velocidad (w^*) modificada mediante diferencias según se describe en el interior de las gráficas. Se muestra perfiles entre 50 y 70 unidades verticales de altura (vórtice centrado en 60) y para las abscisas (eje Y) 20, 25, 30, 35 y 40. Momentos de integración 20, 50, 150, 250 y 350Δt.

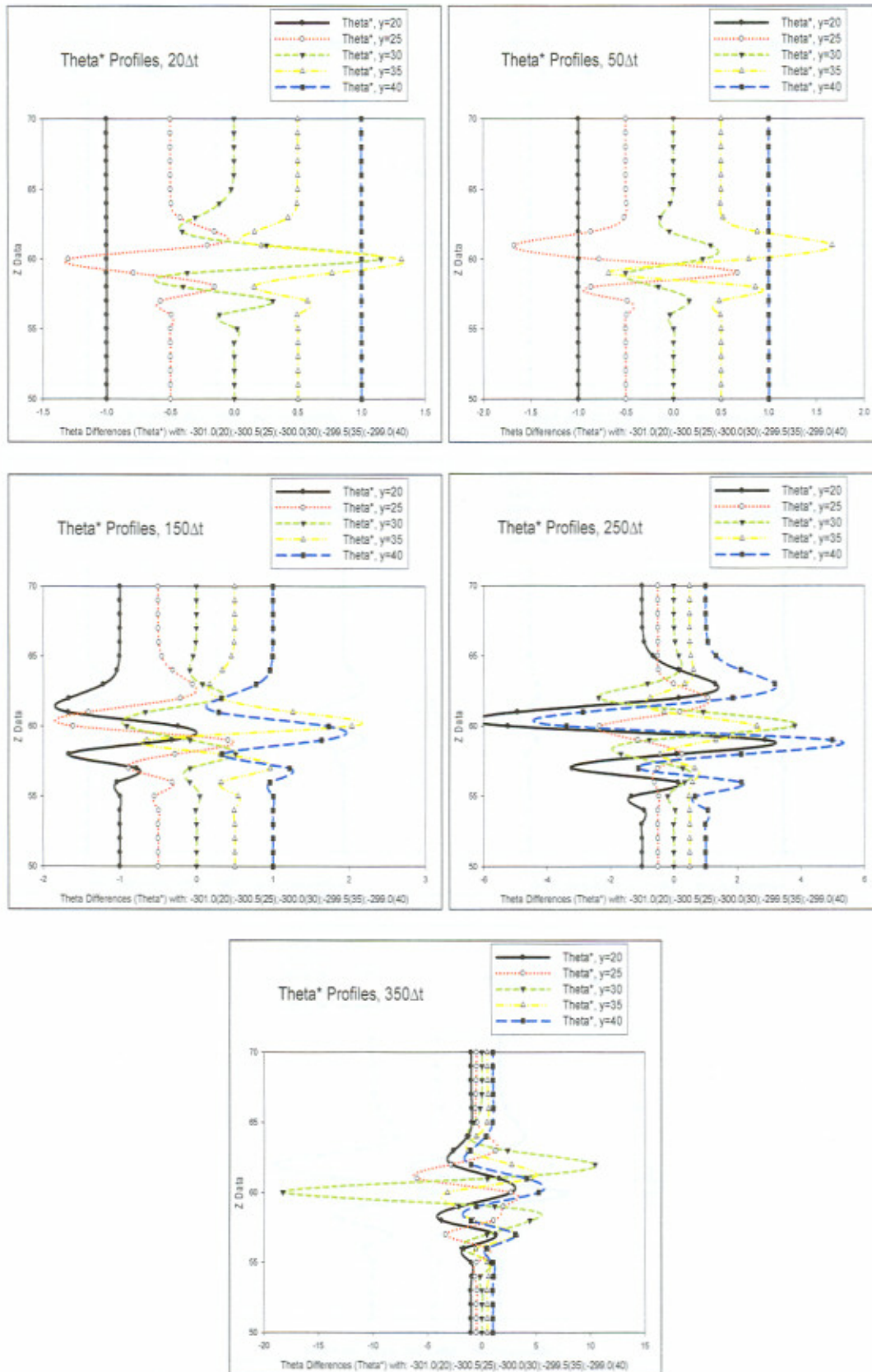


Fig. VI.65- Perfiles verticales de la temperatura potencial (θ^*) modificada mediante diferencias según se describe en el interior de las gráficas. Se muestra perfiles entre 50 y 70 unidades verticales de altura (vórtice centrado en 60) y para las abscisas (eje Y) 20, 25, 30, 35 y 40. Momentos de integración $20, 50, 150, 250$ y $350\Delta t$.

- d) La alternancia viene además acompañada, como en muchas de las gráficas anteriores se ha venido mostrando, de una no simetría respecto de ningún valor concreto y mucho menos respecto de un supuesto valor medio.
- e) La comparación simultánea de gráficas asociadas a las componentes u , v y w muestra una disparidad de comportamientos, no haciéndolas semejantes salvo quizá los perfiles para 150 y $250\Delta t$ de las dos primeras componentes de la velocidad; hecho que realmente podría incluso estar asociado a las escalas utilizadas para mostrar los perfiles. Como comentario interesante añadido cabe destacar, Figura VI.66, un elevado nivel de acoplamiento entre las componentes u y v de la velocidad para los perfiles en $y=30$, que no seguiría el análisis propuesto más arriba de desacoplamiento con el transcurso del tiempo. Este hecho incidental podría responder a una mera coincidencia de las oscilaciones de ambas magnitudes a lo largo del tiempo. Esta última observación se corrobora con el resto de perfiles de esas variables para este momento $350\Delta t$ ya que son claramente diferentes.

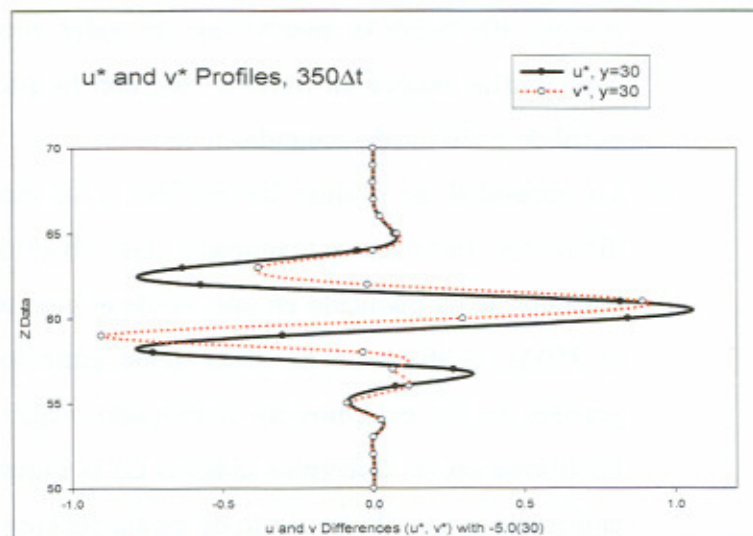


Fig. VI.66- Muestra del acoplamiento incidental entre perfiles de u^* y v^* para $y=30$ en el instante $350\Delta t$. Este hecho no se repite con el resto de los perfiles para el mismo instante en otras posiciones diferentes.

- f) Obviamente, las mayores oscilaciones, sobre todo para los últimos instantes de integración, ocurren en los perfiles centrales de las gráficas ($y=30$) y, según nos movemos hacia las alas de las representaciones, estas oscilaciones van disminuyendo hasta alcanzar las zonas de la malla no afectadas por el vórtice donde no existirían en absoluto (no mostrados en su totalidad en las gráficas).
- g) Algunos de estos perfiles muestran una tendencia diferente de la del apartado anterior, observándose un máximo para las oscilaciones en el perfil central, según nos alejamos de esa zona perfiles de menor oscilación para, posteriormente en los más alejados, presentar de nuevo valores mayores de dichas oscilaciones. Tanto el comportamiento del apartado anterior como el descrito ahora serían justificados por, según se vio en las figuras VI.39 y VI.40, para la u y w , la presencia de las tres zonas especificadas entonces.
- h) La construcción de las gráficas para la variable temperatura potencial difiere de las anteriores ya que para hacerlas comparables, al igual que el valor medio sustraído en el caso de la variable w era mucho menor que las cantidades usadas para u y v , ahora es necesario restar una cantidad mucho mayor, $301^{\circ}\text{O}-299^{\circ}\text{O}$, puesto que el valor medio de esta magnitud se mueve en torno a 300, con lo que la línea de perfil de $y=30$ queda centrada en cero.
- i) La necesidad de evaluar los perfiles y su evolución para diferentes instantes y comparar las observaciones que hagamos se ha traducido en que, desde el momento 20 hasta el $350\Delta t$, la distancia de observación entre los diferentes perfiles de los extremos ha disminuido, según se observa fácilmente en las diferentes gráficas de la Figura VI.65, sin embargo éste es sólo un efecto de escala del eje y .
- j) Una observación lógica de la información que obtenemos con el modelo propuesto es que la estratificación del fluido en el entorno del vórtice presenta alternancia de

estabilidades e inestabilidades que se justificarían por la pendiente de los diferentes segmentos que constituyen los perfiles manejados.

- k) Dado que el estado inicial contemplaba una estratificación indiferente para todas alturas y todas las posiciones, queda claro que las perturbaciones dinámicas que produce la vorticidad asociada a la perturbación inicial afecta y varía el comportamiento de las estructuras térmicas. Este hecho no se presenta, como es lógico, hasta que ha transcurrido un tiempo suficiente como para acoplar los movimientos verticales con las oscilaciones de la estratificación (de la temperatura potencial). Basta observar que las gráficas de la Figura VI.64 y VI.65 están desacopladas y con comportamientos muy diferentes hasta alcanzar el instante $350\Delta t$, hecho que se va produciendo paulatinamente a lo largo de los momentos de integración mostrados.

VI.2.13 COMPARACIÓN CON COMPORTAMIENTOS ATMOSFÉRICOS REALES.

Una vez finalizada la exposición del modelo y sus salidas para el caso de un único vórtice impuesto en el centro de la malla y desarrollándose en el tiempo y en el espacio nos parece apropiado estudiar algunos comportamientos reales de las variables en la Atmósfera y más concretamente en la Capa Límite con dichas salidas. Con este objetivo, las Figuras VI.67 a 69 muestran dichos efectos comparativos entre comportamientos reales de variables termodinámicas en la baja Atmósfera y algunas de las salidas del modelo. Se observa que:

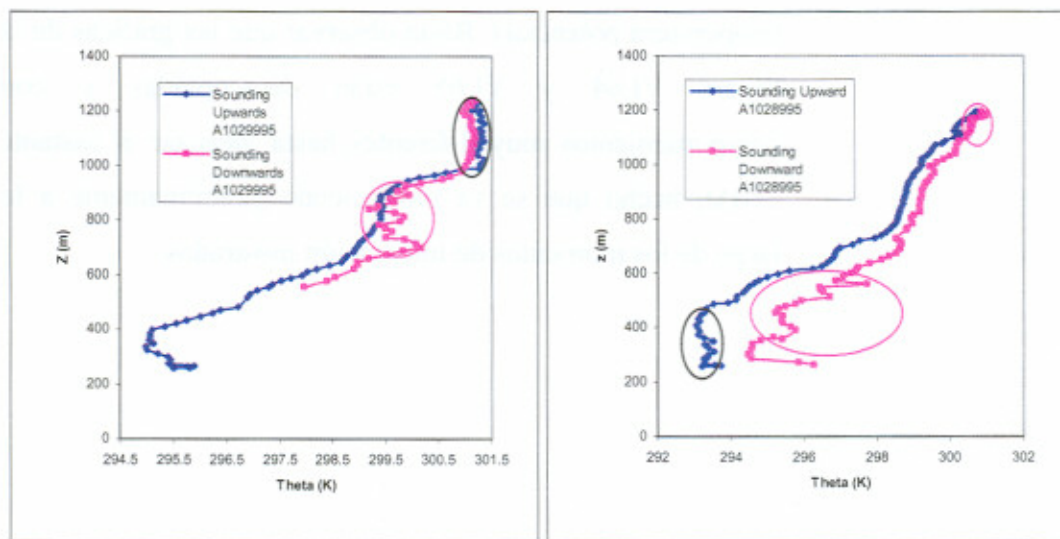


Fig. VI.67- Muestra de dos sondeos meteorológicos (ascenso y descenso) realizados con globo cautivo. Variable representada temperatura potencial, ascenso en azul descenso en sepia. Zonas marcadas comparables a comportamiento oscilatorio de variables del modelo.

- La Figura VI.67 muestra un comportamiento real de sondeos meteorológicos de la baja atmósfera, con la variable temperatura potencial.
- En ella se observa la evolución espacial correspondiente a dichos sondeos reales atmosféricos de muestra, procedentes de campañas de trabajo realizadas en el entorno de la Central Nuclear de Almaraz relacionadas con proyectos de investigación realizados en los años 1993, 94 y 95 por el Departamento de Ciencias de la Atmósfera de la UCM y el Departamento de Física de la Universidad de Extremadura,

bajo la dirección del catedrático Dr. D. José Agustín García García.

- c) Se observa, además, un posible análisis de estratificación de la Capa Límite. Las gráficas se desarrollan desde el suelo real, aproximadamente a 260 metros s.n.m., hasta unos 1200 metros¹.

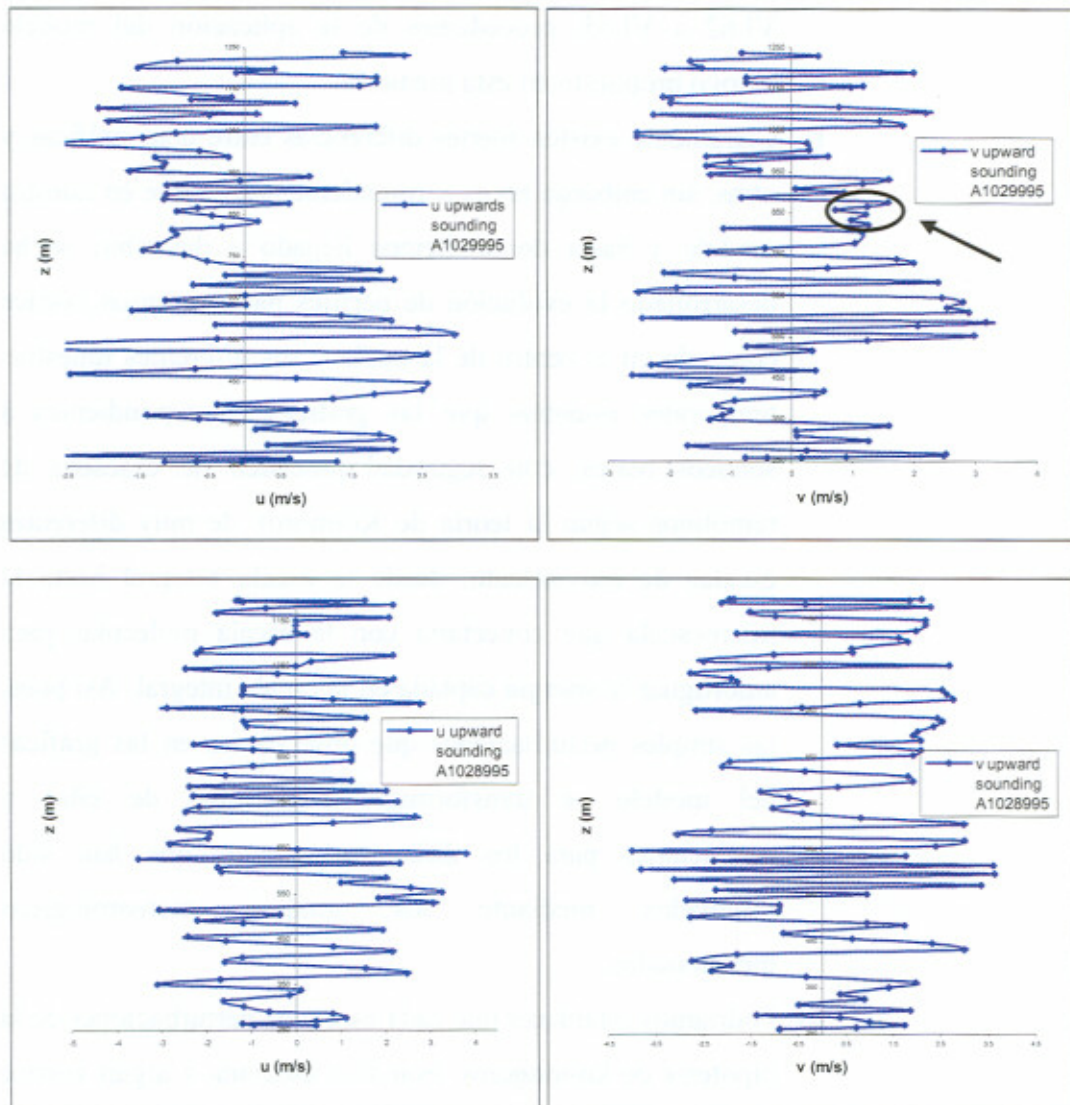


Fig. VI.68- Variación vertical de las componentes horizontales de la velocidad (u y v) procedentes de los mismos sondeos de la Figura VI.67. Sólo se muestra el efecto para el ascenso del globo cautivo. Con la zona ovalada y señalada se muestra un posible acoplamiento, según la ampliación construida en la Figura VI.69.

¹ La cota superior para los distintos sondeos realizados en el proyecto variaba dependiendo de condiciones meteorológicas y de las limitaciones del propio dispositivo.

- d) La figura VI.68 muestra la evolución, también vertical, de las componentes u y v del campo de velocidades para esos mismos sondeos.
- e) Tras el análisis de estas dos figuras se puede concluir que son relativamente semejantes (comparables) a los perfiles de temperatura potencial y de componentes de la velocidad (especialmente de estas últimas) mostrados en las figuras VI.62 a VI.65, procedentes de la aplicación del modelo teórico propuesto en esta memoria.
- f) Claramente existen fuertes diferencias entre unas gráficas y otras, sin embargo no es sorprendente puesto que en nuestro modelo y hasta donde hemos llegado a describir, se ha desarrollado la evolución de perfiles para un único vórtice colocado en el centro de la malla y sus diferentes muestras temporales mientras que las gráficas correspondientes a sondeos reales, con seguridad proceden de cascadas de remolinos según la teoría de Kolmorov de muy diferentes escalas de movimiento, desde la escala integral hasta la microescala que conectaría con la escala molecular para amortiguar la energía captada en la escala integral. Así pues, las simples perturbaciones que observamos en las gráficas del modelo se transforman en multitud de ellas u oscilaciones para los diferentes estratos que han sido estudiados mediante los sondeos meteorológicos mencionados.
- g) Podríamos establecer que cada escala de perturbaciones de la hipótesis de kolmogorov estuviera asociada a algún vórtice de los propuestos en esta memoria.
- h) Un ejemplo podría mencionarse observando la semejanza entre la perturbación para la componente v del sondeo A1029995, señalada con una flecha y un círculo (Figura VI.68), que ha sido sometida a una zona ampliada y superpuesta a la perturbación correspondiente a la misma variable, v , del modelo, para la ordenada $y=30$ del perfil en

$250\Delta t$, mostrado en la figura VI.63. Ambas han sido construidas de manera que la superposición se realice dentro de unas cotas y valores razonables y sobre todo comparables. Para ello, tanto a la serie real como a la serie obtenida mediante el modelo se les ha restado la media de los valores correspondientes a las perturbaciones.

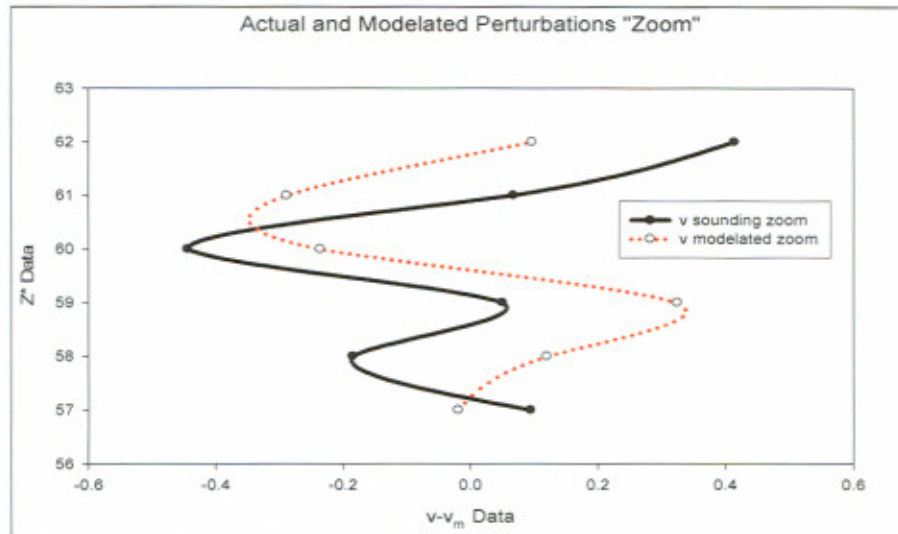


Fig. VI.69- Muestra de la zona ampliada de la Figura VI.68 y de un tramo de la variable v proporcionada por la salida del modelo (otros detalles en el texto).

- i) El resultado de este pequeño estudio comparativo muestra que el tipo de perturbaciones reales del sondeo y teóricas del modelo son prácticamente superponibles, por lo que no parece descabellado interpretar que en ese subestrato atmosférico gobernaría la turbulencia un vórtice de características semejantes al propuesto teóricamente en el modelo numérico de este caso de estudio.

En este capítulo se han obtenido e interpretado gráficas elaboradas con las salidas numéricas del modelo. En los últimos párrafos se ha puesto de manifiesto que los posibles comportamientos reales de flujos turbulentos, especialmente atmosféricos, quedan escasamente descritos con la simple presencia de un vórtice y su correspondiente resolución. Evidentemente se podrían obtener otro tipo de salidas, dado que la metodología empleada es muy genérica. Estas posibles líneas de trabajo permitirán en un futuro desarrollos complementarios a los propuestos aquí. En el

próximo capítulo se avanzará algo más para posibles y futuras comparaciones ya que se desarrollará, más resumidamente, el comportamiento y evolución sufrido por el fluido que ocupa la malla establecida mediante la instalación de tres vórtices.

En primer lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la malla establecida, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, es decir, las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En segundo lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En tercer lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En cuarto lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En quinto lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En sexto lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En séptimo lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En octavo lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En noveno lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En décimo lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En undécimo lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En duodécimo lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En decimotercer lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En decimocuarto lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

En decimoquinto lugar se mostrará la evolución de la velocidad de las partículas que se encuentran en la zona central de la malla, para ello se han tomado como ejemplo las partículas que se encuentran en la zona central de la malla.

CAPITULO VII
ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL MODELO.
3 VÓRTICES

VII.1 INTRODUCCIÓN

Una vez descritos los principales comportamientos correspondientes a las salidas del modelo numérico propuesto sobre el desarrollo funcional descrito en el capítulo IV se ha realizado una serie de diferentes intentos basados fundamentalmente en el número, el tipo y la localización de series de vórtices. El caso expuesto en el capítulo anterior de un único vórtice se ha planteado mediante diferenciación del campo de velocidades en los puntos en los que se sitúa dicho vórtice respecto del resto de los puntos de la malla sin perturbar. Con objeto de ampliar algo más la posible utilidad del modelo proponemos un caso, variante del original, que podría parecerse a la realidad más que la instalación de un solo vórtice.

El número de vórtices usados para estas ampliaciones ha sido de tres; durante el desarrollo de la investigación se ha trabajado también con cinco, tanto en el caso de idénticas propiedades numéricas como diferentes, sin embargo se ha decidido no presentarlo en la memoria ya que no hemos observado hechos muy destacables a los descritos hasta ahora y en este capítulo, más allá de la propia estructura de los cinco vórtices.

El tipo de vórtices ha correspondido, para el campo de velocidades, a perturbaciones idénticas y diferentes. La localización se ha ubicado en puntos de la malla situados en la vertical de $x=30$ e $y=30$, que distan del punto de malla central 6 y 12 unidades de rejilla. Esta circunstancia ha dado lugar aproximadamente a algo más de veinte ensayos.

Mostraremos el caso correspondiente a distancia de vórtices de 6 unidades de rejilla, tanto por arriba como por abajo, del centro de la malla; esto es, $z=54$, 60 y 66.

En el desarrollo del capítulo nos vamos a centrar, fundamentalmente, en características diferenciadoras respecto del caso de un vórtice, resaltando, como es lógico, aquellas diferencias generadas precisamente por la presencia de los otros dos vórtices y que aporten alguna característica o explicación añadida a las que ya se han efectuado en el capítulo anterior. Pese a todo se mostrarán algunos comportamientos semejantes con objeto de establecer que el desarrollo

espacio-temporal conduce a veces a una amplificación o reducción de los efectos mencionados para un vórtice.

Al igual que en el caso de un único vórtice la malla utilizada para todos estos ensayos continúa siendo la idónea que, en concreto, corresponde a $60 \times 60 \times 120$ puntos de la rejilla, como ya se especificó convenientemente en el capítulo anterior y los intervalos temporales continúan también siendo los mismos. Se han desarrollado hasta $400\Delta t$, aunque en la totalidad de las muestras seleccionadas se evalúan sólo hasta $350\Delta t$, intentando evitar con ello dispersiones de las soluciones no deseables y unificar resultados con el caso del vórtice único.

Se ha seleccionado el caso de los tres vórtices verticales como representativo de otro número de los mismos e incluso en otras posiciones diferentes dada la similitud de comportamientos y desarrollos analizados con las salidas del modelo para todos los casos estudiados. Otra razón añadida y de gran importancia ha sido el hecho de que el momento de integración en el que el modelo pasa de la segunda a la tercera fase, superando las perturbaciones turbulentas el criterio del 10% sobre los valores medios de las variables, ocurre también en el paso $22\Delta t$ (el caso que se va a exponer fue diseñado para no adelantar este criterio); más adelante se detallará con más precisión este salto entre fases de integración.

Daremos por finalizada la integración del modelo para esta prueba en el momento en el que las estructuras originales sean irreconocibles o generen otras distintas (incluso agrupándose) o terminen por desaparecer.

VII.2 EVOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE VÓRTICES

Como acabamos de especificar en la introducción vamos a pasar al estudio de un modelo, con base en las mismas ecuaciones y el mismo tipo de desarrollo computacional, pero aplicado a un sistema de tres vórtices ligeramente diferentes en el que se mantiene la opción del vórtice estudiado en el caso anterior (punto central de la malla).

VII.2.1 CONDICIONES INICIALES.

La descripción de los tres vórtices y su localización son las siguientes:

- Vórtice 1:
 - $x=30$
 - $y=30$
 - $z=66$
 - $u=5'02$
 - $v=4'98$
 - $w=0'499$
- Vórtice 2:
 - $x=30$
 - $y=30$
 - $z=60$
 - $u=5'1$
 - $v=4'9$
 - $w=0'499$
- Vórtice 3:
 - $x=30$
 - $y=30$
 - $z=54$
 - $u=5'01$
 - $v=4'99$
 - $w=0'51$

Como se observa, generamos la vorticidad mediante la derivación no nula de los campos de velocidad respecto de las coordenadas transversales a las diferentes componentes, tanto en los puntos en los que se imponen los tres vórtices como en sus puntos inmediatamente adyacentes. Siendo los valores de la velocidad para puntos de la malla no afectados (5, 5, 0'5), al igual que en el caso ya estudiado.

Dada la cuantificación de las diferencias de la velocidad que define los vórtices respecto de la velocidad no afectada por ellos es esperable que las diferencias evaluadas mediante el modelo sean con frecuencia bastante débiles, aunque no físicamente insignificantes o despreciables. De hecho, el número de

Reynolds asociado oscila en torno a 10^7 ; valor que evidentemente nos sitúa dentro del rango para la turbulencia totalmente desarrollada.

Los pasos de integración continúan normalizados con la técnica descrita para un vórtice y también se normalizarán los valores de algunas de las variables que representan la evolución de los vórtices mediante las medias en cada caso y se sitúan sus valores relativos en los ejes y de las figuras en las que se muestren este tipo de evoluciones.

Los tamaños de la malla, la localización de ejes y algunas otras características genéricas (variables, efecto de los bordes, etc) están referenciadas en la descripción del caso de un vórtice y se repiten tal cual cuando fueren necesarios en este capítulo.

VII.2.2 VARIABLES PUNTUALES. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

La figura análoga a la VI.1 para el caso de tres vórtices no presenta diferencia reseñable puesto que como se verá a lo largo de la descripción de la segunda fase de este caso, la influencia de los otros dos vórtices, superior e inferior, no afecta al centro de la malla hasta que se obtienen resultados del modelo para tiempos muy avanzados (muy superada la segunda fase).

Una vez estudiado el desarrollo y evolución de las variables para este caso de los tres vórtices se han observado pequeñas diferencias, como era previsible, de comportamiento con las variables referenciadas al caso de un vórtice. Por esta razón algunas figuras no se muestran, caso de las evoluciones en planos horizontales y otras se ha preferido modificar el sistema de presentación, ignorando los desarrollos temporales que más se parecían al caso de un único vórtice, esto es 1, 5, 10 Δt de la segunda fase de integración, así como 50 y 150 Δt para la tercera.

Las representaciones en planos horizontales, al estar ubicadas en $z=60$ (altura de la ubicación del vórtice único y del central en este caso), no muestran prácticamente alteración respecto del caso ya estudiado. Con el paso del tiempo algunas de estas diferencias crecen por lo que se mostrarán algunos casos concretos de planos horizontales para alguna variable.

La Figura VII.1 corresponde a las diferentes componentes de la velocidad (u , v , w) así como a la temperatura potencial (Θ) para el instante 20 de la evolución de la segunda fase de integración. Tal y como se ha descrito con anterioridad, el salto entre la segunda fase y la tercera se produce en el momento 22 Δt , con lo que seguimos pensando que el momento 20 Δt es indicativo del final efectivo de la segunda fase y en él se advierten las diferencias iniciales entre el caso de un vórtice y el de tres. Las principales características de las gráficas de esta figura se pueden esquematizar en:

- a) Las zonas centrales de las cuatro gráficas ($57 \leq z \leq 63$) reproducen casi fielmente la zona central de las gráficas 20 Δt de las Figuras VI.2, 3 y 4 (se incluye la componente v de la velocidad; ya en el capítulo anterior se comentó que se comportaba igual que la u).

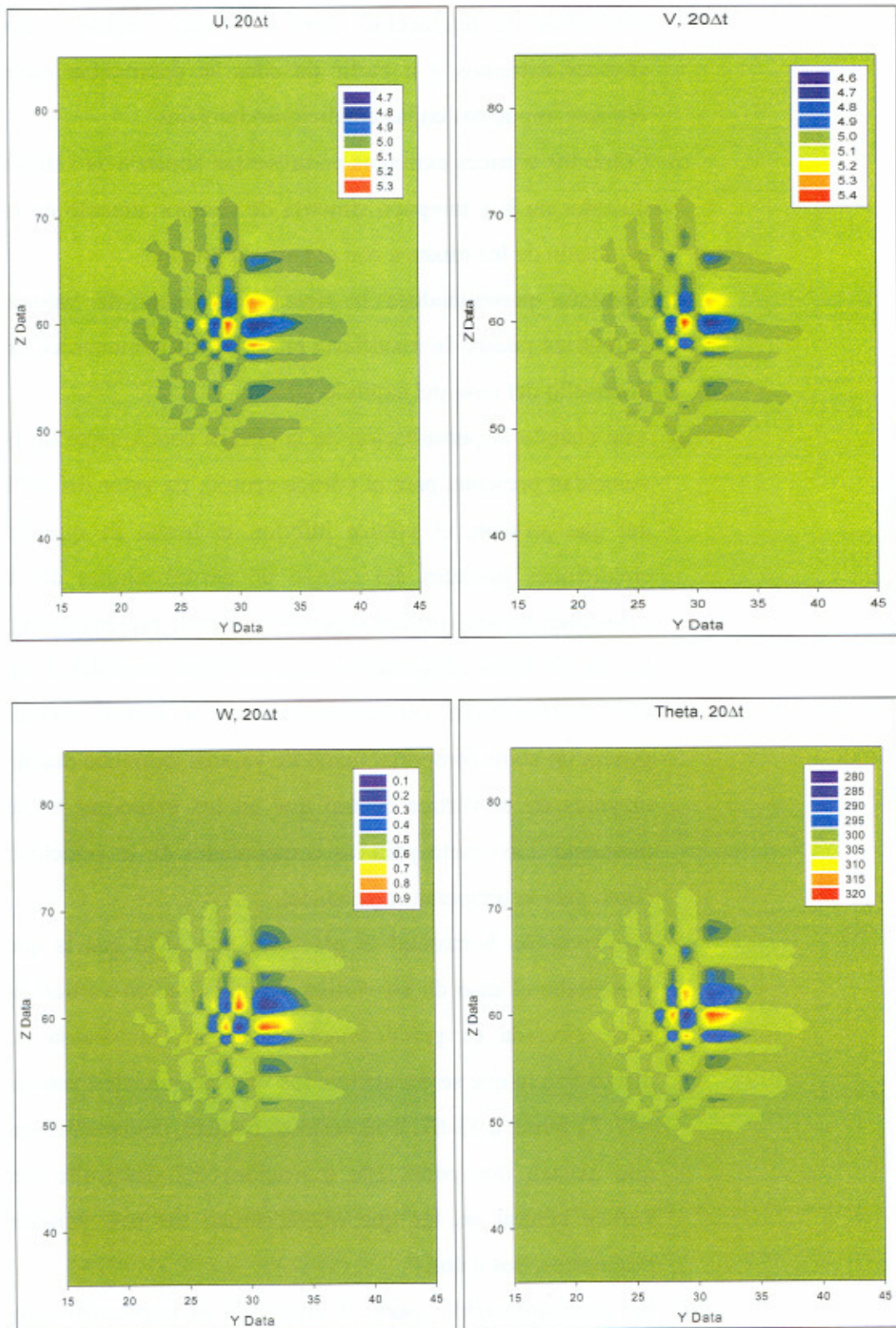


Fig. VII.1- Se muestran las gráficas para las variables u , v , w y Θ (temperatura potencial) para el momento $20\Delta t$ correspondiente a la evolución de la segunda fase de integración para el caso de tres vórtices iniciales situados según el texto. Planos YZ .

- b) Desde los niveles de malla del párrafo anterior se encuentran dos zonas de interacción entre el vórtice central y los vórtices extremos y a partir de ellas se desarrollan estos vórtices impuestos en las condiciones iniciales.
- c) Como los vórtices extremos no presentan simetría de valores iniciales no hay tampoco simetría de comportamiento en la evolución de los mismos con el paso del tiempo.
- d) Continúa presentándose la típica alternancia de valores asimétrica puesta de manifiesto en todos los comentarios de desarrollo del caso del capítulo VI.
- e) Aún cuando la perturbación de la tercera componente de la velocidad presenta, para el vórtice central, un valor del 10% del que presenta el vórtice inferior, el hecho de que las condiciones iniciales del campo de perturbaciones de la velocidad, en los vórtices superior e inferior presentasen en las dos primeras componentes unas perturbaciones del orden del 10-20% de las correspondientes en el vórtice central, genera un claro comportamiento de valores extremos mucho mayores en el vórtice central que en los exteriores en el momento $20\Delta t$ tanto para las componentes de la velocidad como para la temperatura potencial.
- f) La expansión horizontal es prácticamente igual que la que presentaba el caso de un vórtice mientras que en vertical la zona afectada es prácticamente la misma sumándole la distancia a la que se encuentran los vórtices iniciales, esto es $\approx 47-73$ frente a $53-67$. Todo esto se traduce, obviamente, en que existen dos zonas (de transición) del desarrollo del vórtice central en las que interaccionan los tres vórtices propuestos, dos a dos.
- g) Es poco apreciable, pero el efecto de la explicación del apartado e) genera que el desarrollo horizontal del vórtice central sea ligeramente superior al de los otros dos vórtices. Esto nos lleva a pensar que el desarrollo horizontal

presentado en la Figura VI.42 debe ser detallado en función de las proporciones de las perturbaciones.

- h) Los valores extremos que se reflejan en las escalas de color para la descripción de cada una de las cuatro gráficas de la Figura VII.1, comentadas hasta ahora, se corresponden perfectamente con sus equivalentes utilizados a lo largo del primer caso, segunda fase de integración, momento $20\Delta t$, tanto para la u como para la w y para la θ . Es decir, el modelo, al menos hasta este paso de integración, conserva la estructura del vórtice central y sus valores extremos, no viéndose afectados, éstos, por la existencia de zonas de perturbaciones menores (apartado e)) superior e inferior.
- i) El análisis simultáneo de la evolución de los tres vórtices para las variables u y v muestra un comportamiento similar (acoplamiento) mientras que el de las variables w y θ presenta la misma característica (acoplamiento) pero desfasado respecto del de u y v (desacoplamiento) manteniendo la misma información que se obtuvo para el caso de un vórtice.

VII.2.3 PERTURBACIONES TURBULENTAS. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

La Figura VII.2, al igual que la VI.8 en el caso de un solo vórtice, muestra la comparación de campos afectados por la velocidad media y la velocidad perturbada, cuya suma daría la velocidad instantánea. Entonces se observaron tres zonas: una primera no afectada por la perturbación inducida por el vórtice, una segunda de transición hacia la tercera en donde se encontraba la práctica totalidad de las perturbaciones turbulentas del campo de velocidad. Ahora se observan también esas zonas con la diferencia de que se están sumando los tres campos perturbados procedentes de cada uno de los vórtices instalados según se especificó anteriormente. De tal forma, subsiste la segunda zona, muy interesante, que muestra la transición entre la primera libre de perturbaciones turbulentas y la tercera conteniendo u' (perturbaciones turbulentas).

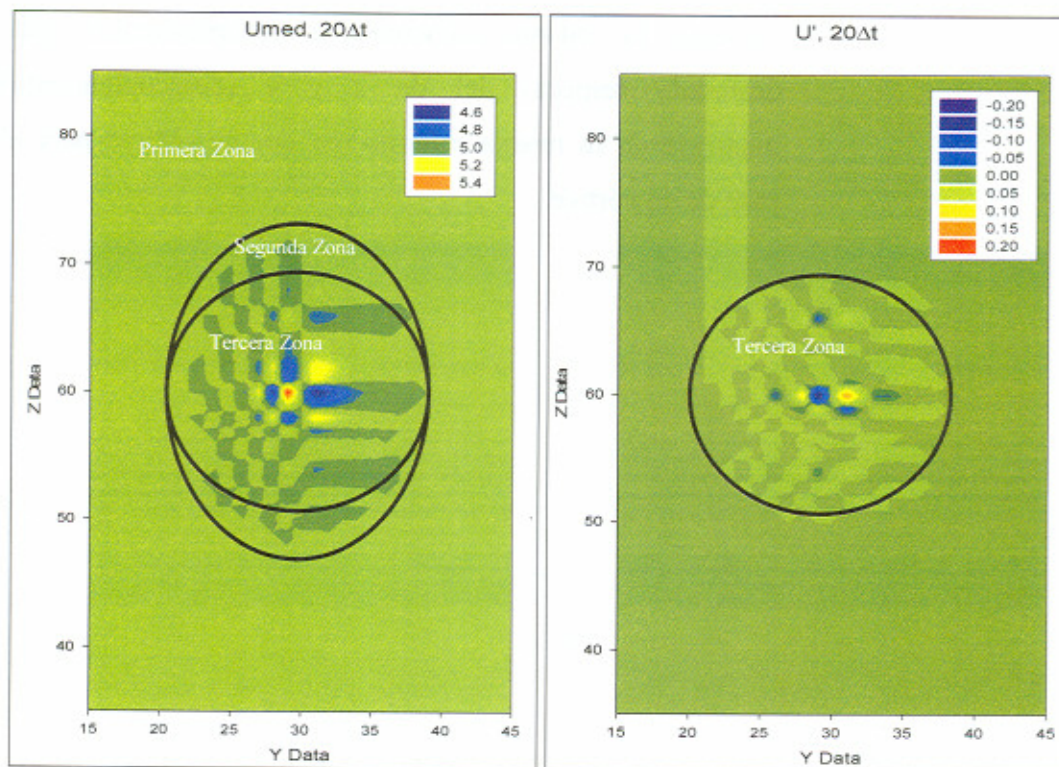


Fig. VII.2- Se muestra el estado alcanzado por las variables U_{med} (U) y U' (u') en el momento $20\Delta t$ correspondiente a la evolución de la segunda fase de integración para el caso de tres vórtices iniciales situados según el texto. Planos YZ.

Obviamente, las características geométricas que definen cada una de las zonas no son ahora las mismas que las que se usaron en el caso de un único vórtice. Sin embargo, las medidas máximas horizontales coinciden con las que se manejaron entonces y sólo, como era de esperar, la medida vertical se ve afectada ya que la colocación de los tres vórtices se ha llevado cabo en diferentes niveles verticales de la malla. Con todo esto, se observa que:

- a) La caracterización dinámica de cada una de las zonas descritas se puede esquematizar, al igual que se hizo en el caso de un vórtice, mediante la siguiente descripción:

- | | |
|------------------------|---|
| a. Primera Zona | $u_{ma}=u=\bar{u} \rightarrow u'=0$ |
| b. Segunda Zona | $u_{ma} \neq u=\bar{u} \rightarrow u'=0$ |
| c. Tercera Zona | $u_{ma} \neq u \neq \bar{u} \rightarrow u' \neq 0,$ |

donde \bar{u} es lo que en la Figura VII.2 aparece como U_{med} y u_{ma} la velocidad en cada uno de los puntos de la primera zona, es decir, sin verse afectada por el efecto de los vórtices.

- b) Esta misma propiedad se puede hacer extensible para el resto de componentes de la velocidad.

La Figura VII.3 muestra simultáneamente el campo de perturbaciones turbulentas para las tres componentes de la velocidad y la temperatura potencial en el momento $20\Delta t$ de la segunda fase de integración. Se observa que:

- a) Como ya se ha comentado para la figura anterior, la zona que se ve afectada por el desarrollo de los tres vórtices, para estas variables, es algo más pequeña verticalmente que para las componentes de la velocidad.
- b) En el caso de la componente vertical de la perturbación turbulenta de la velocidad (w') se puede observar que la tercera zona descrita con antelación contiene en su interior los tres vórtices cuyos efectos aún no se han visto afectados

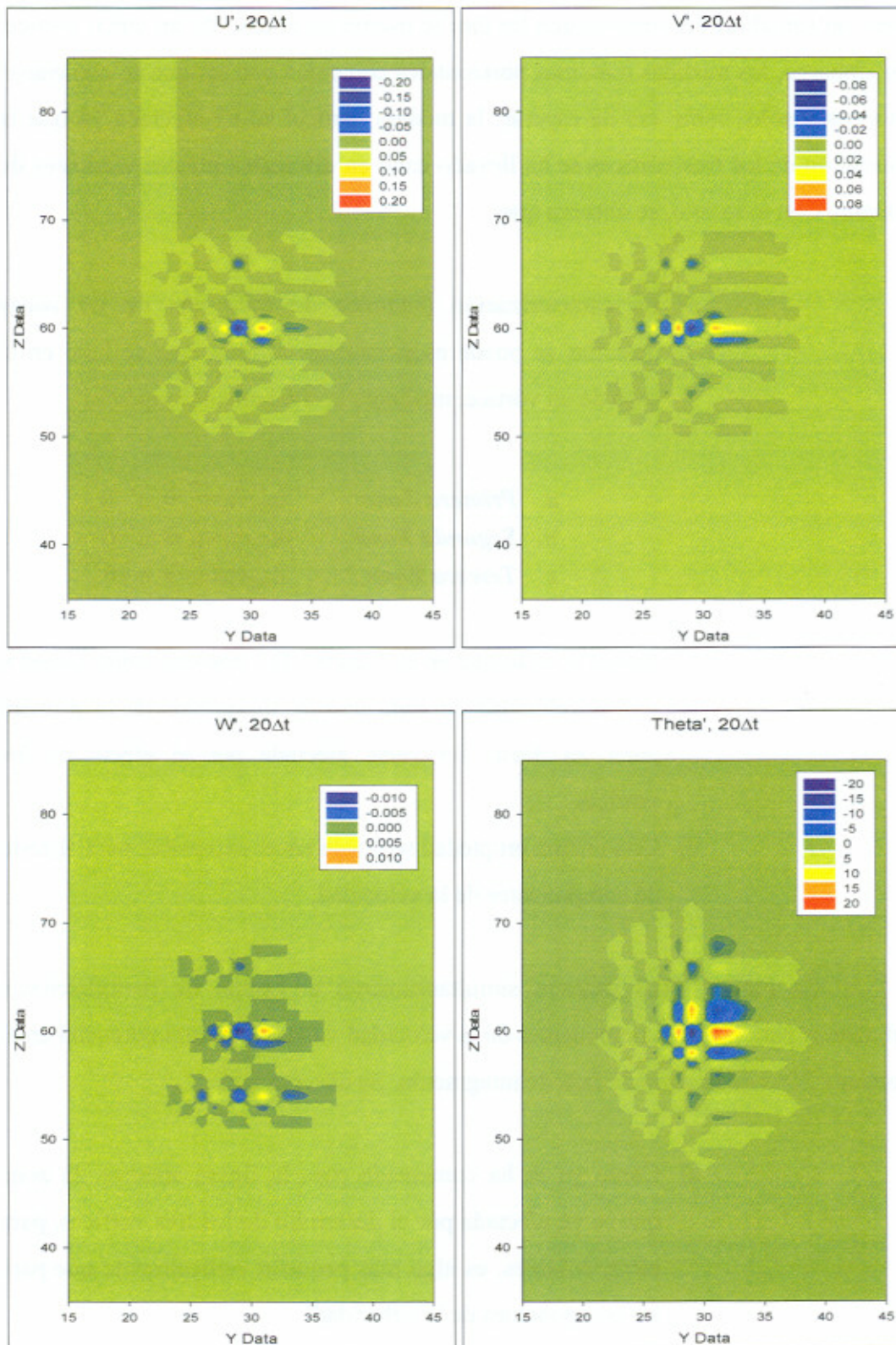


Fig. VII.3- Se muestran las gráficas para las perturbaciones turbulentas u' , v' , w' y Θ' (temperatura potencial) para el momento $20\Delta t$ correspondiente a la evolución de la segunda fase de integración para el caso de tres vórtices iniciales situados según el texto. Planos YZ.

entre sí. Es decir, considerado cada vórtice por separado, según se vio en la descripción de la Figura VI.8 del capítulo anterior, su desarrollo daría lugar a la generación de tres terceras zonas (desde dicho punto de vista) que aún no han interferido entre sí. En otras palabras, la interacción de los vórtices, en lo que a la componente vertical se refiere, es bastante más lenta que la correspondiente a las componentes u y v . Se produce con un retraso, debido lógicamente a que la velocidad de desarrollo vertical es la décima parte que las horizontales y además que su perturbación es un orden menor que las de u' y v' .

- c) No se observa un especial acoplamiento-desacoplamiento entre las variables utilizadas, al menos hasta el instante de integración mostrado. Esta ausencia fue también observada cuando se trabajó con un solo vórtice; sin embargo, tras iniciar la tercera fase y con el avance del tiempo, algunas observaciones de acoplamiento-desacoplamiento fueron posibles. Es de esperar un comportamiento parecido cuando se analice esos transcurso temporales en este caso.
- d) Las gráficas que informan de la evolución temporal y el desarrollo espacial alcanzado por la temperatura potencial y sus estadísticos ($\bar{\theta}$ y θ') muestran un comportamiento muy parecido entre el valor puntual y su perturbación turbulenta. Dado que $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ y que $\bar{\theta}$ no sufre variaciones considerables (Figura VII.4) sino que prácticamente permanece constante es lógico que los desarrollos de θ y θ' hayan salido muy semejantes. Este hecho ocurre también, lógicamente, con el comportamiento de estas magnitudes para el caso de un solo vórtice instalado en el centro de la malla. Para su estudio basta con visualizar tan solo la zona central de la Figura VII.4 que muestra el comportamiento del caso del capítulo VI para $\theta_{\text{med}} (\bar{\theta})$; mientras que la cuarta gráfica de la Figura VI.4 y VI.11 corresponderían al

caso paralelo para las magnitudes θ y θ' (no detallado en el caso).

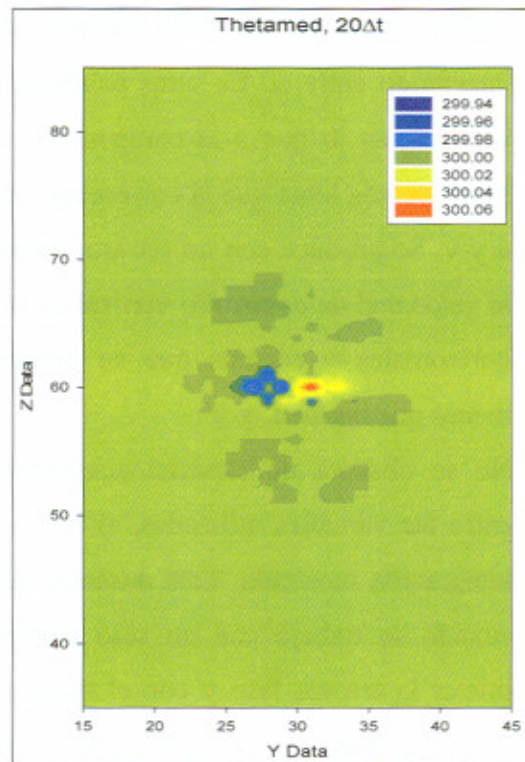


Fig. VII.4- La figura muestra el comportamiento para el instante $20\Delta t$, plano YZ, de la temperatura potencial media ($\text{Thetamed} = \bar{\theta}$). Obsérvese la pequeñez de las variaciones de esta magnitud según la tabla de colores adjunta.

VII.2.4 COMPONENTES PUNTUALES DEL ROTACIONAL. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

La Figura VII.5 muestra las tres componentes del rotacional de la velocidad en el instante $20\Delta t$ en planos YZ, final efectivo de la segunda fase de integración. Se observa que:

- a) Las gráficas que componen esta figura muestran, en su parte central, en torno a la altura de malla de 60 unidades, que la evolución, por el momento, es la misma que la correspondiente a un vórtice, Figuras VI.15 a 17.
- b) El orden de magnitud de las escalas es el mismo, indicando con ello que las tres magnitudes sufren, según se alejan del centro de la malla, el mismo tipo de comportamientos. A partir de aquí se encuentran estructuras diferentes de las que presentaba un solo vórtice debido a la interacción con las zonas de rotacionales generadas por los otros dos vórtices impuestos en este caso.
- c) No se observa ningún tipo de acoplamiento-desacoplamiento espacial entre las diferentes componentes del rotacional de la velocidad salvo, si acaso, en la evolución y desarrollo de las zonas afectadas por la presencia de los tres vórtices, ya que el tamaño observado en las tres gráficas es prácticamente el mismo, tanto para el eje y como para el eje z (aún distintos entre sí).

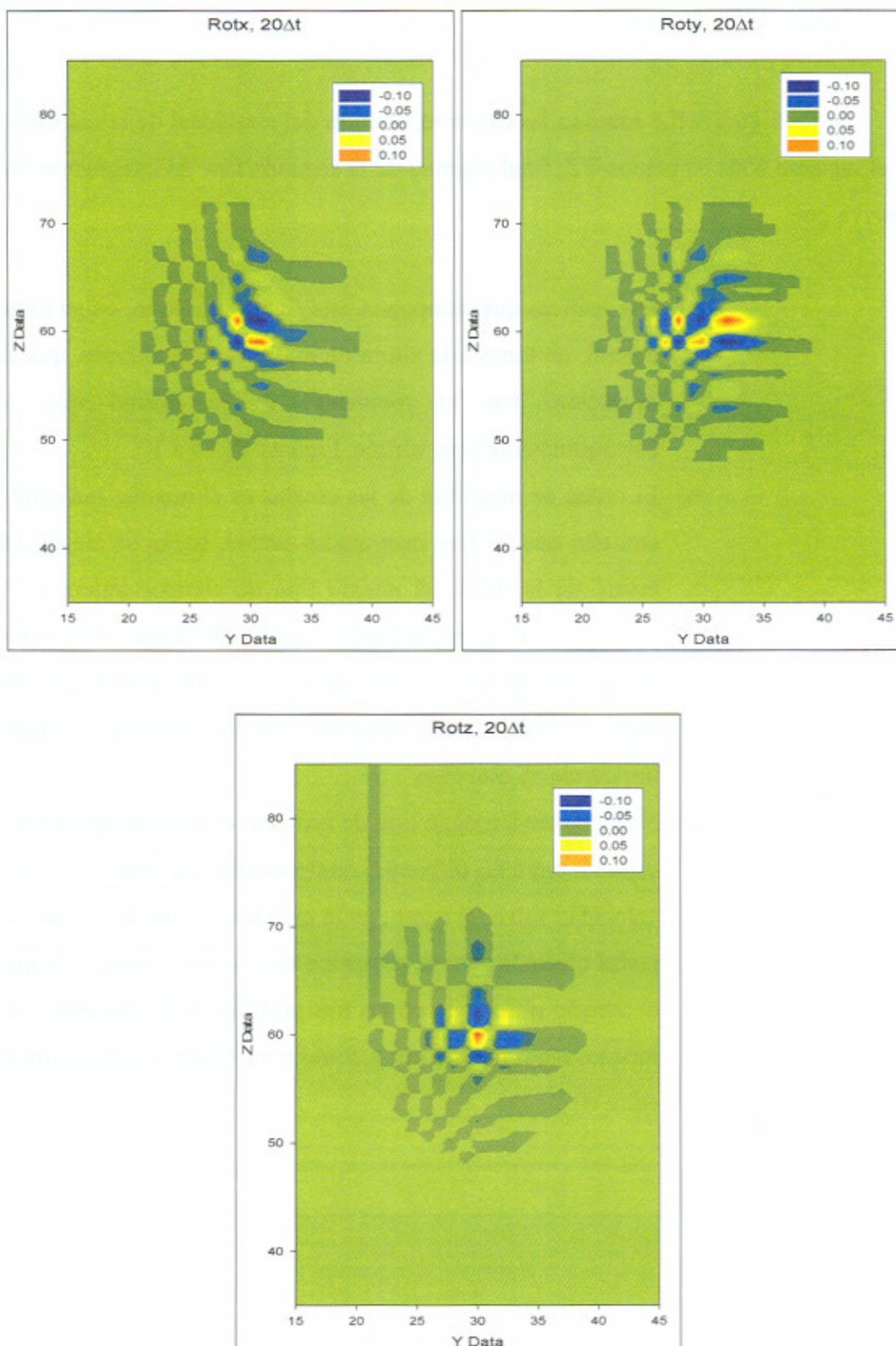


Fig. VII.5- Se muestran las gráficas para las componentes x, y y z del rotacional de la velocidad (Rotx, Roty y Rotz) para el momento $20\Delta t$ correspondiente a la evolución de la segunda fase de integración, para el caso de tres vórtices iniciales situados según el texto. Planos YZ.

La Figura VII.6 muestra el comportamiento de las variables de la Figura VII.5 en un perfil obtenido mediante un corte en $y=30$. Se observa que:

- a) Por comparación con la Figura VI.18 la zona afectada por las perturbaciones respecto del valor base de la malla ha aumentado de manera que ahora dicha zona ha crecido hasta alcanzar los niveles comprendidos entre 49 y 71.
- b) Se mantienen los acoplamientos entre las tres componentes del rotacional de la velocidad, con una estructura semejante a la presentada en la Figura VI.18, pero ahora entre los niveles 56 y 63. A partir de éstos aparecen las zonas afectadas por los vórtices colocados por encima y por debajo del central.
- c) Las estructuras comprendidas entre los niveles 63-64 y 55-56 presentan características que podríamos definir como de transición. Estas zonas se han desarrollado en aquellos niveles en los que interactúan la parte superior del vórtice central con la inferior del vórtice colocado por encima de él (63-64) y la parte inferior del central con la superior del vórtice colocado por debajo de él (55-56).
- d) Los vórtices superior e inferior encuentran su desarrollo en las zonas de la gráfica comprendidas entre los niveles 64-71 (superior) y 49-55 (inferior).
- e) Si se observa con detenimiento, salvo factores de escala que modularían la desviación respecto del valor nulo (típico en todos los puntos de la malla alejados de los vórtices), la estructura de los tres tramos de perfiles (49-54, 56-62 y 64-71) se correspondería con la de la Figura VI.18 para un único vórtice, diferenciándose de ella en que el tramo 49-54 pierde la información de su zona superior convirtiéndola en transición, para dar paso al tramo 56-62, mientras que el tramo 64-71 pierde la información de su zona inferior convirtiéndose en transición para dar paso nuevamente al tramo 56-62 (a su vez, este último tramo perdería su

información superior e inferior para dar paso a los tramos 49-54 y 64-71).

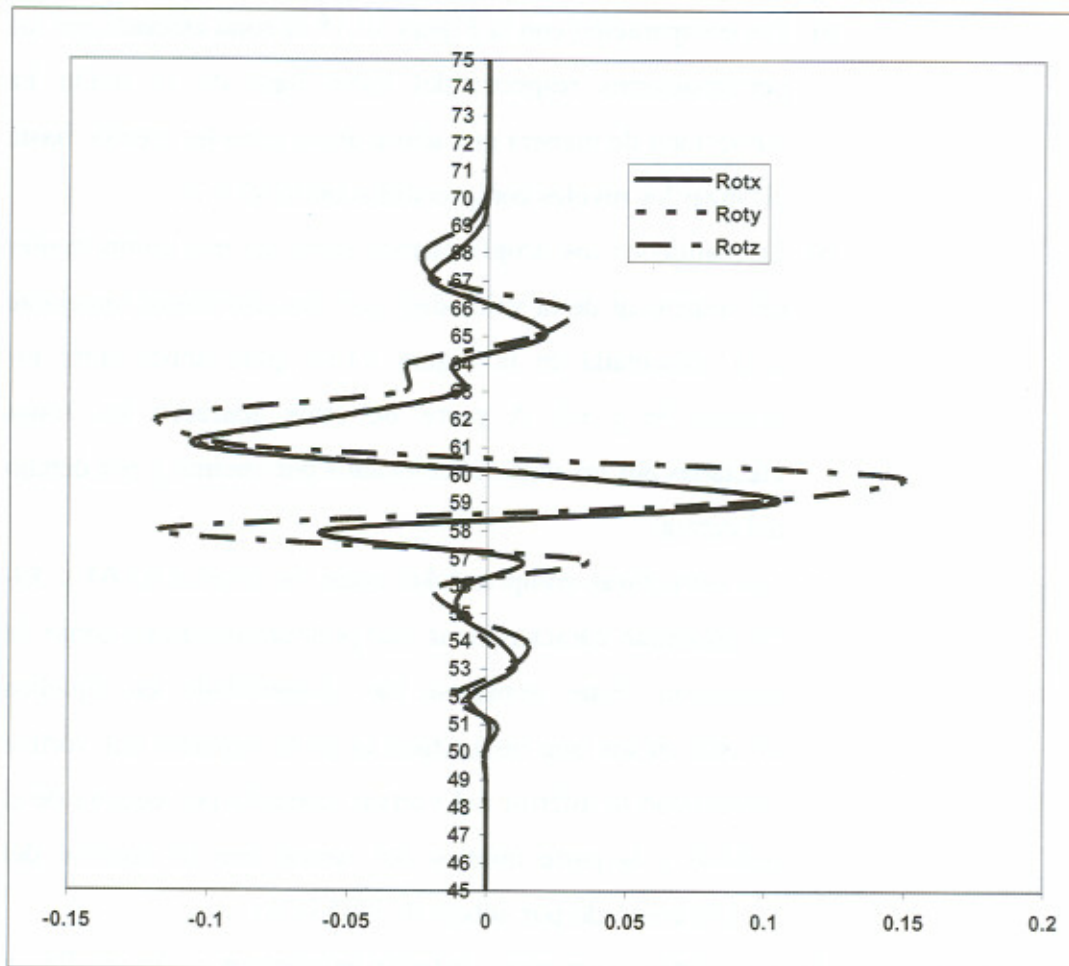


Fig. VII.6- Se muestran los perfiles de las componentes x, y y z del rotacional de la velocidad (Rotx, Roty y Rotz) para el momento $20\Delta t$ en un corte vertical en $y=30$ y $45 \leq z \leq 75$.

La Figura VII.7 muestra el comportamiento de los perfiles procedentes de funciones dependientes de la componente vertical de la velocidad (w), de la tercera componente del rotacional de la velocidad (Rotz) y de la temperatura potencial (Theta). Se observa que:

- f) Comparando esta figura con la Figura VI.19 los comportamientos de las funciones f , g y h son muy similares con la excepción de las zonas de transición, comprendidas entre los niveles 55-56 y 63-64.

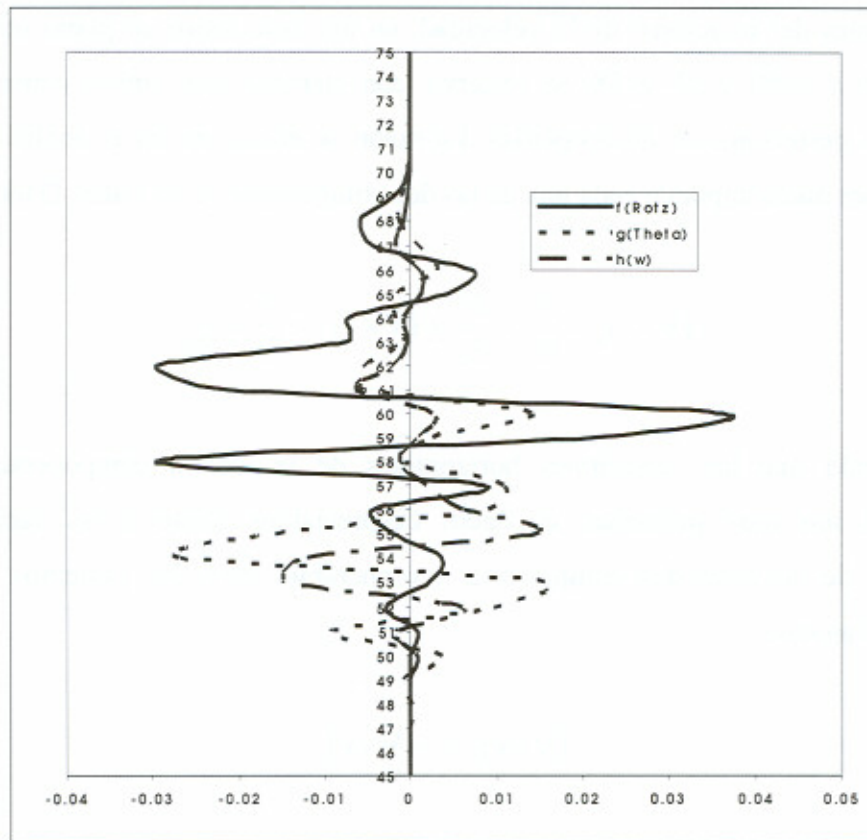


Fig. VII.7- Comparación de magnitudes dependientes de la componente z de la velocidad ($h(w)$), del rotacional de la velocidad ($f(Rot z)$) y de la temperatura potencial ($h(Theta)$). Instante de integración $20\Delta t$ en un corte vertical en $y=30$ y $45 \leq z \leq 75$.

- g) Encontramos un acoplamiento aproximado en la zona central de la figura que se deforma según nos desplazamos hacia los extremos, atravesando las zonas de transición y las afectadas por los otros dos vórtices, dando lugar a una estructura poco definida que refleja el grado de interacción para este nivel de integración.

La Figura VII.8 muestra la variación espacial de las dos primeras componentes del rotacional de la velocidad, en un corte sobre un plano horizontal para $x=30$ y $z=60$ y $22 \leq y \leq 38$. Se observa, con claridad, que ambas componentes están casi perfectamente desacopladas. La razón se encuentra en el análisis de las expresiones que componen cada una de las dos componentes estudiadas. Dado que

$$(\nabla \times v)_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \text{ y } (\nabla \times v)_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7.1)$$

y aceptando que las variaciones horizontales de la tercera componente de la velocidad son muy pequeñas, es decir, despreciables frente a las variaciones verticales de las otras dos componentes (comparables entre sí), podemos escribir cuantitativamente:

$$(\nabla \times v)_x \approx -(\nabla \times v)_y \quad (7.2)$$

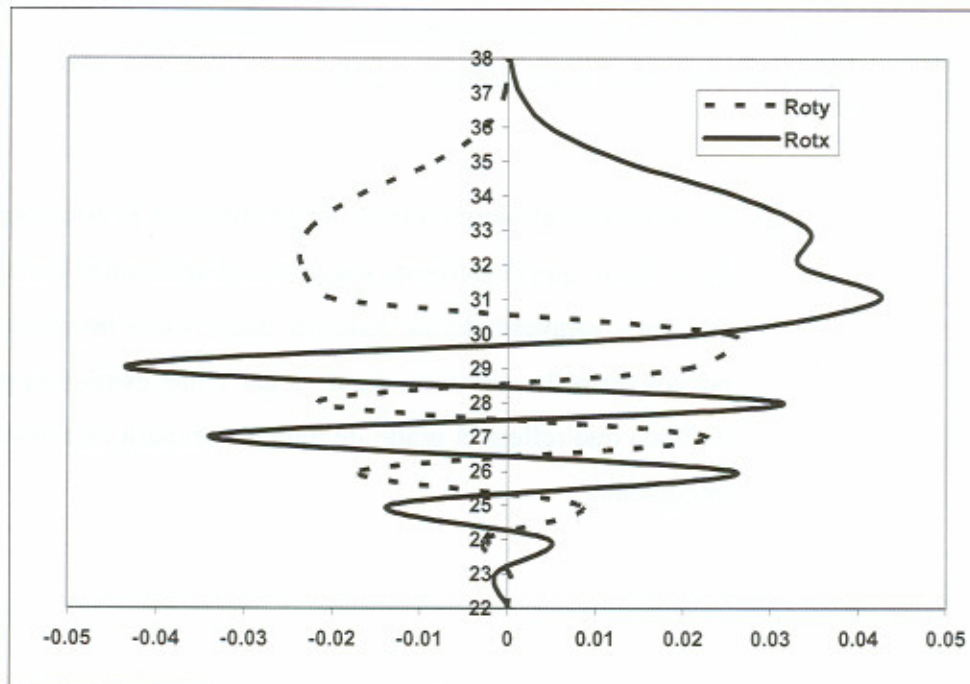


Fig. VII.8- Gráfica simultánea de las dos componentes horizontales del vector rotacional de la velocidad ($Rotx$ y $Roty$). Instante de integración 2031 en un corte horizontal en $x=30$, $z=60$ y $22 \leq y \leq 38$.

VII.2.5 PERTURBACIONES TURBULENTAS DEL ROTACIONAL. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

La figura VII.9 muestra simultáneamente las distribuciones espaciales de las perturbaciones turbulentas de las tres componentes del rotacional de la velocidad en el instante $20\Delta t$ (final efectivo de la segunda fase). La información que puede obtenerse desde un análisis no exhaustivo informa de los mismos comentarios prácticamente que los reseñados para las Figuras VI.24 a 26 con las variantes que la presencia de los tres vórtices han venido incorporando a lo largo de la descripción de este caso.

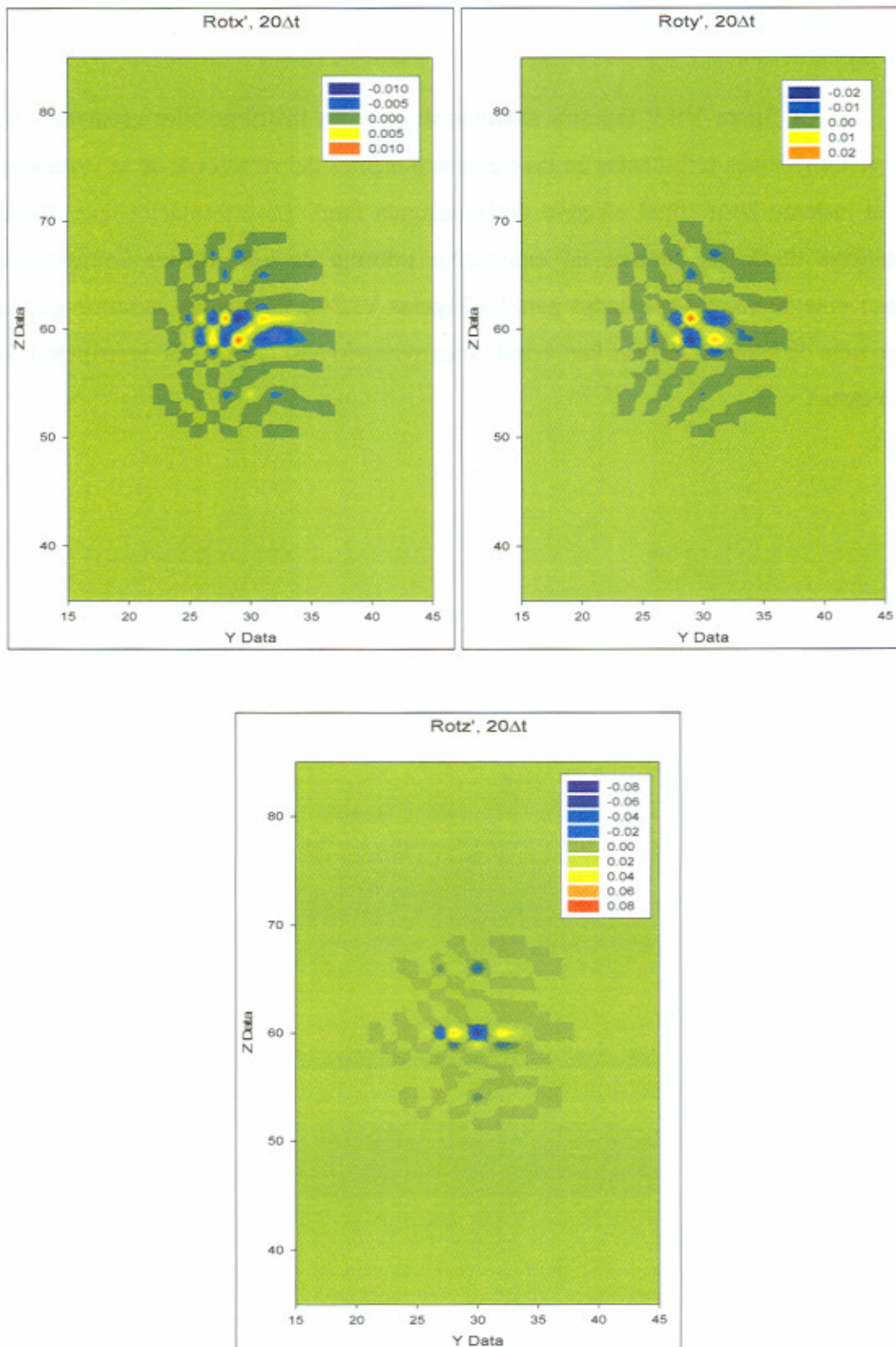


Fig. VII.9.- Se muestran las gráficas para las perturbaciones turbulentas de las componentes x , y y z del rotacional de la velocidad ($Rotx'$, $Roty'$ y $Rotz'$) para el momento $20\Delta t$ correspondiente a la evolución de la segunda fase de integración para el caso de tres vórtices iniciales situados según el texto. Planos YZ .

La Figura VII.10 corresponde a la comparación, para el mismo intervalo de integración, de la componente del rotacional de la velocidad media y de la perturbación turbulenta del mismo. Se delimitan tres zonas al igual que en la Figura VII.2 (análoga a VI.27) producidas, como entonces, por la afectación progresiva de la perturbación turbulenta desde una zona central (Rotx') hasta la zona exterior de los tres vórtices con valores no perturbados por ningún efecto. No se dibujan las zonas primera, segunda y tercera puesto que sus características son las de la Figura VII.2.

Se puede insistir en el hecho de que las zonas de influencia directa de cada vórtice se encuentran separadas por zonas de transición, ya mencionadas en otras propiedades observadas a lo largo de las distintas figuras de este capítulo; así como el hecho de la alternancia no simétrica de valores mayores y menores que un valor medio prefijado.

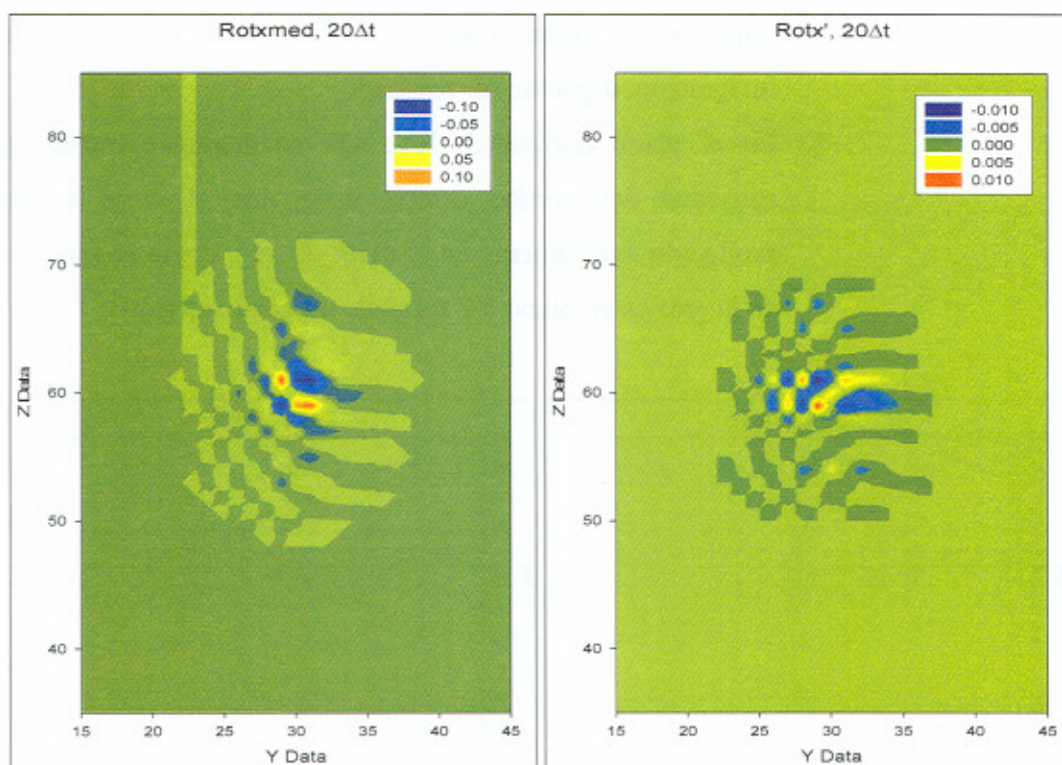


Fig. VII.10- Comparativa entre las componentes primera del rotacional medio (Rotxmed) y su perturbación turbulenta (Rotx'), para el momento $20\Delta t$, correspondiente a la evolución de la segunda fase de integración para el caso de tres vórtices iniciales situados según el texto. Planos YZ.

VII.2.6 ALGUNAS PROYECCIONES 2D DEL VECTOR ROTACIONAL DE LA VELOCIDAD. PRIMERA Y SEGUNDA FASES.

La Figura VII.11 muestra la proyección de los vectores rotacionales de la velocidad en planos YZ y XY para el instante de integración $20\Delta t$. Se observa que:

- En el plano YZ la representación de ambas componentes como un único vector bidimensional resalta la mayor actividad en la zona central (correspondiente al mayor de los vórtices instalados), extendiéndose en horizontal hasta las divisiones de malla 25 y 35, mientras que los vórtices situados por encima y por debajo aún no desarrollan una actividad considerable, ni mucho menos comparable, lo cual imposibilita algún comentario, en este momento de integración, digno de ser resaltado.
- En el plano horizontal, XY, aún se distingue menos la actividad del vórtice central dado que el corte se ha producido exactamente en el nivel 60 que, como se observa en la gráfica en plano YZ no es de especial actividad.

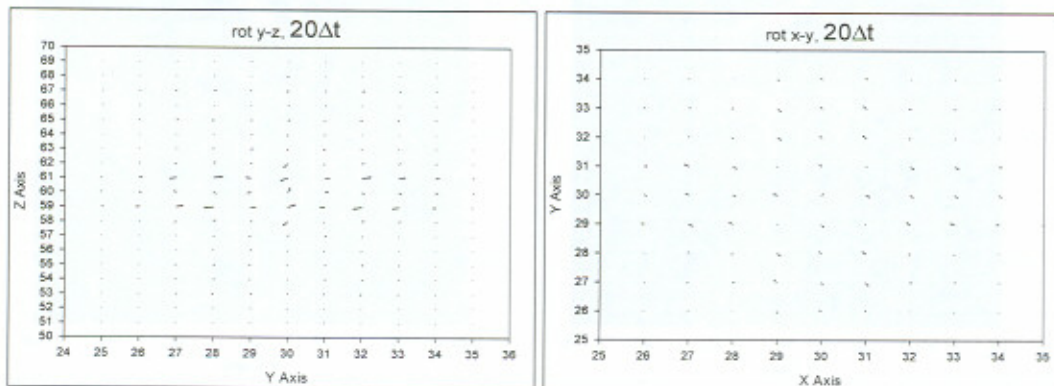


Fig. VII.11- Muestra de las proyecciones del vector vorticidad en cada punto de malla sobre planos XY y YZ en el momento $20\Delta t$. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 1:2.

- c) Obviamente, en el plano XY, no se puede tener información de los dos vórtices no centrales instalados en el momento inicial.

VII.2.7 VARIABLES PUNTUALES. TERCERA FASE.

Finalizada la descripción de propiedades del desarrollo del modelo para la segunda fase de integración vamos a iniciar los comentarios apropiados para la tercera y última fase sobre la misma hipótesis del establecimiento de tres vórtices situados en un plano vertical ($x=30$) en los puntos de la malla $y=30$ y $z=54, 60$ y 66 con las características dinámicas ya mencionadas en el inicio de este capítulo. Haremos una descripción siguiendo la técnica del capítulo VI, aunque no tan exhaustiva, ya que intentaremos resaltar las diferencias que se observen respecto del caso de un único vórtice. En algún caso también mencionaremos alguna similitud que aporte continuidad en los resultados del modelo.

Vamos a describir el comportamiento de esta última fase referenciando, fundamentalmente, las gráficas que muestren la evolución para los momentos 250 y $350\Delta t$, que creemos suficientemente descriptivos de esta tercera fase.

La Figura VII.12 informa sobre las evoluciones de las perturbaciones de las componentes de la velocidad y temperatura potencial normalizadas con sus valores promedios obtenidos desde el paso de integración 24 hasta el 400 , eliminando los pasos 22 y 23 para evitar el salto brusco que se produciría entre la segunda y tercera fase de integración (visto en la Figura VI.38).

Las gráficas correspondientes a las magnitudes u'/u_m y v'/v_m han perdido el relativo acoplamiento que presentaban en la Figura VI.38 ya que se desfasan bastante más que en aquella, aunque el comportamiento sea semejante. Lógicamente este efecto y cuantos varíen el comportamiento de estas gráficas respecto de las de la Figura VI.38 deben provenir de la presencia de los vórtices añadidos y las alteraciones que éstos provoquen sobre comportamientos ya establecidos.

También, a diferencia del comportamiento de la Figura VI.38 observamos una gran diferencia en la cuantificación de las perturbaciones de los campos de u' y v' .

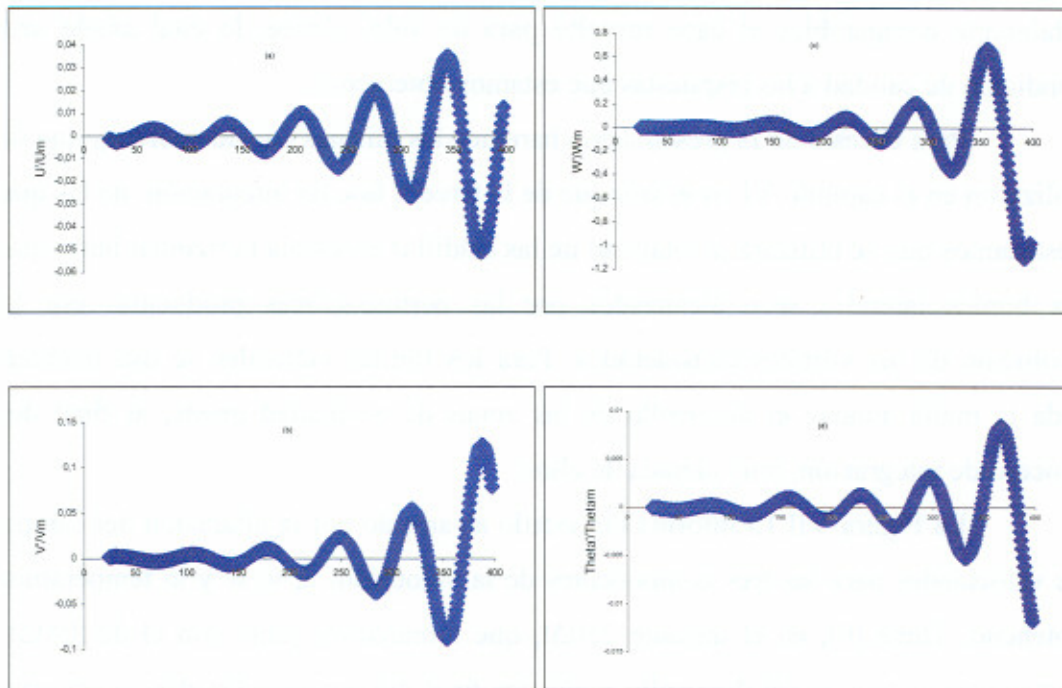


Fig. VII.12- Evolución temporal de las perturbaciones normalizadas con los promedios temporales ($24-400 \Delta t$) de cada serie de las tres componentes de la velocidad junto con la temperatura potencial, para el punto central de la malla, a lo largo de la tercera fase de integración, obtenidas mediante el uso de las ecuaciones propuestas en esta memoria. (a) Componente u , (b) idem v , (c) idem w y (d) Temperatura Potencial (θ). Caso de tres vórtices.

Para el caso de la evolución de w'/w_m y θ'/θ_m la observación indica que persiste el acoplamiento observado también en la Figura VI.38, es decir, la influencia de los efectos térmicos en las convecciones no se ve especialmente alterada por la presencia de los nuevos vórtices añadidos en este caso. Asimismo la relación cuantitativa de escalas ha variado respecto de la mostrada en la Figura VI.38, lógicamente a causa de esos mismos vórtices.

El modelo proporciona información cuantitativa que pudiera no ser muy fiable ya que, a diferencia de la Figura VI.38, los valores numéricos que caracterizan la escala de cada gráfica no son del todo comparables, aun teniendo en cuenta que la w es diez veces menor que la u y la v y las perturbaciones turbulentas mantienen la igualdad para u' y v' , habiéndose considerado para la w' una centésima parte en el caso del vórtice central. Una razón añadida que podría justificar la diferencia de comportamiento que acabamos de mencionar podría ser que además hay que sumar los efectos que inducen las relaciones entre los tres vórtices.

Como comentario final observar que la dispersión de las soluciones proporcionadas por el modelo alcanza valores, para los pasos de integración,

totalmente comparables al caso resuelto para un solo vórtice, lo cual añade una condición de calidad a las respuestas que estamos obteniendo.

Para el resto de la presentación haremos las mismas consideraciones que se utilizaron en el capítulo VI en el enfoque de la tercera fase de integración, de las que destacamos que se utilizará la totalidad de las celdillas en escala horizontal hasta que los bordes laterales sean alcanzados por las perturbaciones producidas por la evolución de los vórtices considerados. Para los límites verticales se usa también toda la malla aunque el desarrollo de las zonas de vorticidad quede, al final del proceso de integración, muy alejada de ellos.

La Figura VII.13 informa del estado alcanzado por la alteración del campo de velocidades para las tres componentes de la velocidad, u , v , w y la temperatura potencial, Θ , en el instante $250\Delta t$, que tomaremos, junto con el de $350\Delta t$, como representativos del desarrollo y alcance final del proceso. En ella, se observa que:

- a) La evolución simultánea de los tres vórtices ha alcanzado a una zona de malla mucho mayor (nos encontramos ya cerca de los extremos horizontales de la malla) y la influencia e interacción de unos vórtices con otros modifica totalmente las estructuras alcanzadas en los instantes mostrados hasta ahora.
- b) La gráfica correspondiente a w es la más deformada respecto de un estadio inicial, lo cual es justificable si se analiza el acoplamiento existente entre el comportamiento de esta variable y el de la temperatura potencial. Insistentemente se ha referenciado el acoplamiento de estas dos variables, cuya base física se encuentra en la dependencia de los movimientos convectivos de las distribuciones verticales de la temperatura y por lo tanto de la estratificación.

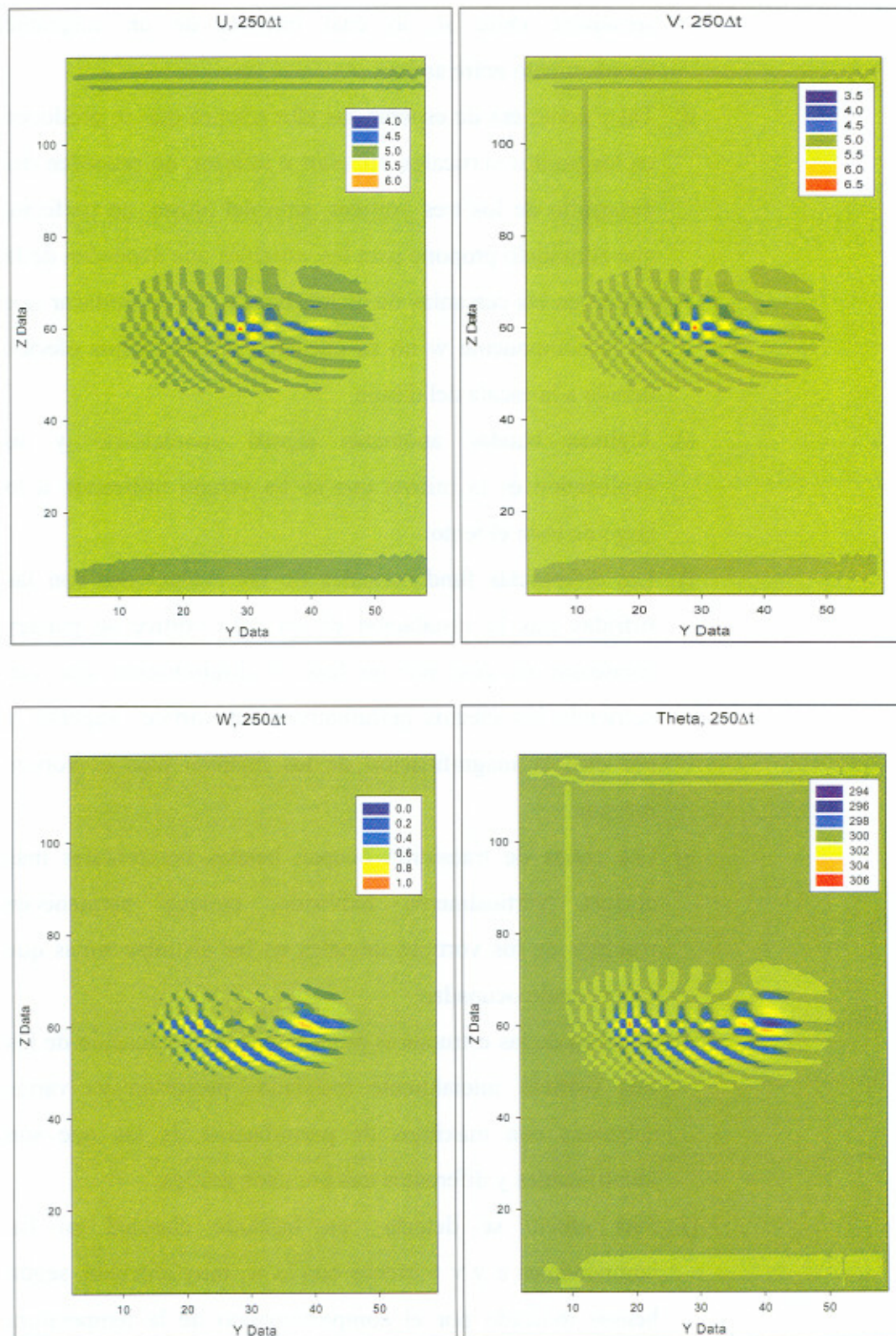


Fig. VII.13- Se muestran las gráficas para las variables u , v , w y Θ (temperatura potencial) para el momento $250\Delta t$ correspondiente a la evolución de la tercera fase de integración para el caso de tres vórtices iniciales situados según el texto. Planos YZ.

- c) El comportamiento de las variables u y v es bastante semejante entre sí, lo cual informa de un aceptable acoplamiento entre ambas.
- d) Tal y como era de esperar, las alteraciones que se producen en los bordes verticales, superior e inferior, no proceden del desarrollo de los tres vórtices, sino del ajuste, no perfecto, que el modelo propone para las variables que dependen de la altura, en las cercanías de dichos bordes. Es de destacar que en la componente w no se pueden visualizar estos efectos debido a la escala del dibujo.
- e) Algunas bandas anómalas siguen apareciendo y su explicación es la misma que se ha venido utilizando a lo largo de todo el texto.
- f) Las diferencias fundamentales de las evoluciones con las sufridas tras la instalación de un solo vórtice se pueden condensar en dos: por un lado la difuminación que van sufriendo los efectos perturbativos del vórtice superior y por otro la magnificación de los mismos para el vórtice inferior.
- g) Las zonas de transición ocupan bandas horizontales más anchas, verticalmente hablando, aunque permanecen residuos de los vórtices iniciales en las distintas zonas que están siendo ocupadas.
- h) Algunas de las estructuras procedentes de la situación de los tres vórtices inicialmente instalados presentan ya varias subzonas con máximos de perturbación de las que son identificables y diferentes tres por cada gráfica.
- i) Este efecto se detecta con bastante claridad en las componentes u y v y menos con la w , muy afectada, según hemos indicado por el comportamiento de la temperatura potencial que, sin embargo, justifica la banda de máximo encontrada en la zona del vórtice inferior.
- j) En las zonas cercanas a la instalación del vórtice central y superior ha aparecido una estructura centrada que presenta

una atenuación de la actividad de los vórtices, acercando, tanto la componentes w como la temperatura potencial, a valores numéricos correspondientes a zonas de malla no afectadas por los vórtices ni por su desarrollo a lo largo de la integración del modelo.

Tal como se indicó al principio de esta tercera fase, no se presentan las evoluciones en planos horizontales ya que la interacción entre los tres vórtices, en el plano $Z=60$, no varía prácticamente el comportamiento mostrado por las figuras correspondientes en el caso de un único vórtice.

La Figura VII.14 informa de los mismos campos que la Figura VII.13 en el momento de integración $350\Delta t$. En ella se observa que:

- a) Las interacciones entre los campos determinados por cada uno de los vórtices son mucho más intensas pasando a visualizarse mezcla de dichos campos que intensifican la subdivisión en zonas de cada una de las estructuras observadas en $250\Delta t$.
- b) Las componentes u y v comienzan a mostrar estructuras semejantes a las de w y θ como respuesta a la interacción también de las diferentes variables entre sí.
- c) El proceso de amortiguación de las alteraciones que mostraba la zona correspondiente al vórtice superior continúa y se extrema mientras que el aumento de la actividad en la zona del vórtice inferior ha continuado.
- d) Por supuesto que la zona de malla afectada tras la expansión de los efectos hasta este, tan avanzado, momento de integración es la práctica totalidad de las dimensiones horizontales de la misma.
- e) No así en la coordenada vertical que se ve minusvalorada en su desarrollo ya que la componente vertical de la velocidad de todos los puntos de la malla, incluso los que presentan vorticidad, aunque hayamos avanzado tantos pasos de

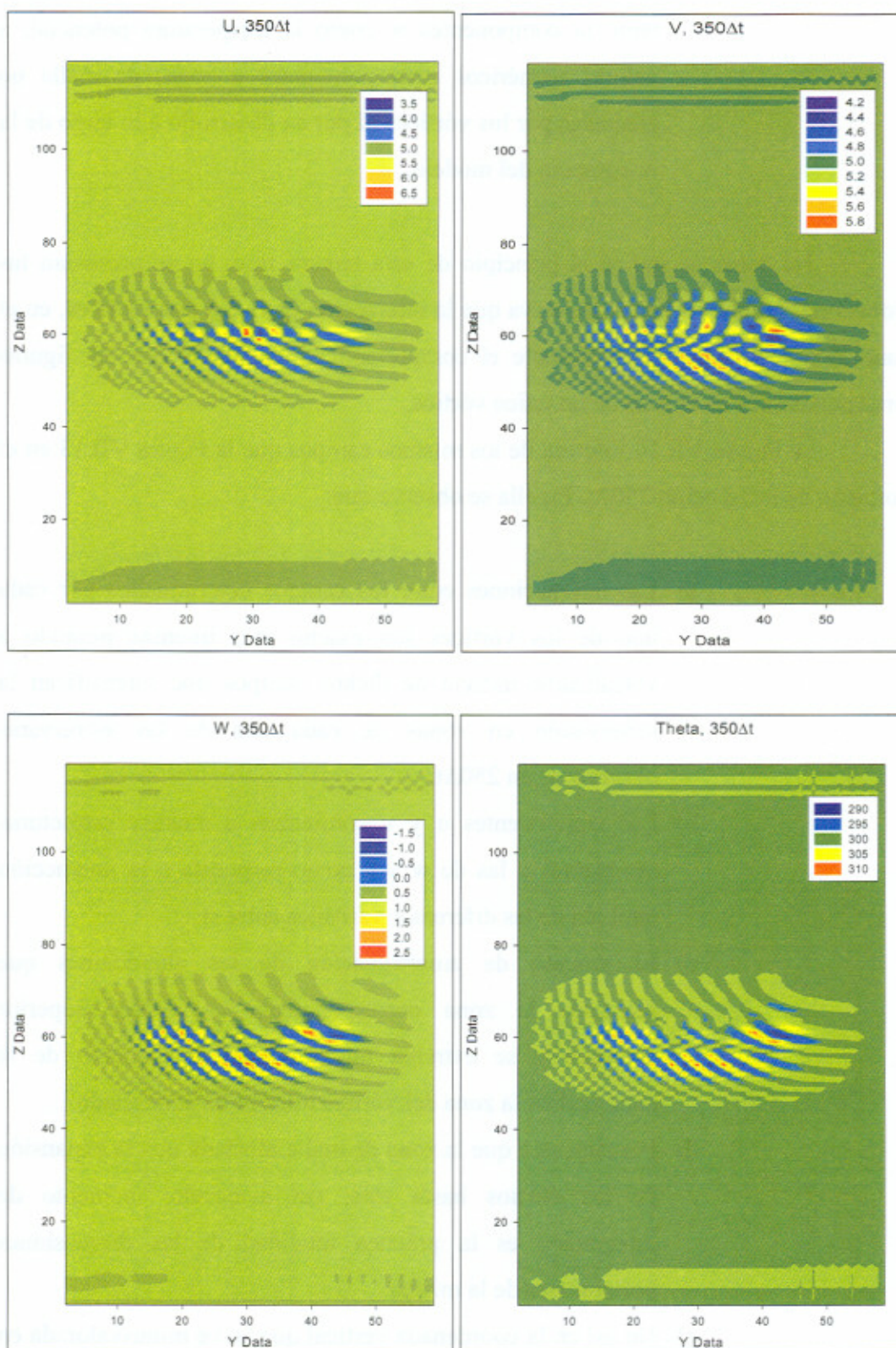


Fig. VII.14- Se muestran las gráficas para las variables u , v , w y Θ (temperatura potencial) para el momento $350\Delta t$ correspondiente a la evolución de la tercera fase de integración para el caso de tres vórtices iniciales situados según el texto. Planos YZ.

integración en el tiempo, mantienen valores inferiores a las otras dos componentes.

- f) El análisis cuantitativo de las escalas de color, tanto en esta figura como en las VI.39 a 41, muestra que el efecto dispersivo de las soluciones obtenidas como salidas del modelo no afecta deformando los valores en cantidades que pudiéramos considerar apreciables. Por ejemplo, el caso concreto de la temperatura potencial para la Figura VI.41 alcanza valores de 318 unidades mientras que en esta figura el valor máximo ronda 310, ambos para el instante de integración $350\Delta t$.
- g) Si acaso fuese de interés reseñar alguna diferencia, tal y como se ha comentado, no muy apreciable, es que en el caso de tres vórtices iniciales presentan, en el momento $350\Delta t$, un intervalo menor que el que se obtuvo para un solo vórtice en el caso de todas las variables expuestas.

VII.2.8 PERTURBACIONES TURBULENTAS. TERCERA FASE.

Las Figuras VII.15 y 16 muestran las distribuciones espaciales de las evoluciones temporales correspondientes a las perturbaciones turbulentas de las variables consideradas en las dos últimas figuras. Más concretamente, los momentos de integración $250\Delta t$ y $350\Delta t$, respectivamente. Se observa que:

- a) En la Figura VII.15 se pueden aplicar los mismos comentarios que para la Figura VII.13 con ligerísimas diferencias prácticamente inapreciables; sin embargo
- b) el detalle más importante a destacar como diferenciador con respecto a la VII.13 es que en las gráficas de las dos primeras componentes, u y v , las perturbaciones turbulentas son capaces de mostrarnos las variaciones de la zona donde se situó inicialmente el vórtice inferior cuando las velocidades puntuales no lo eran en dicha figura.
- c) Las gráficas de la Figura VII.16, para el instante $350\Delta t$, no presentan información adicional con respecto al desarrollo mostrado en la Figura VII.15 para el momento $250\Delta t$.
- d) Cuantitativamente, los extremos de las escalas de dibujo de estas gráficas ($u' -0'3,0'3$; $v' -0'4,0'4$; $w' -0'8,0'8$; $\theta' -4,4$) son algo menores, al igual que ocurría con las componentes de la velocidad sin perturbación turbulenta, que los que presentaba el caso de un solo vórtice, Figuras VI.46 a 48, instante $350\Delta t$ (u' y $v' -0'6,0'6$; $w' -1'2,1,2$; $\theta' -7'5,7'5$).

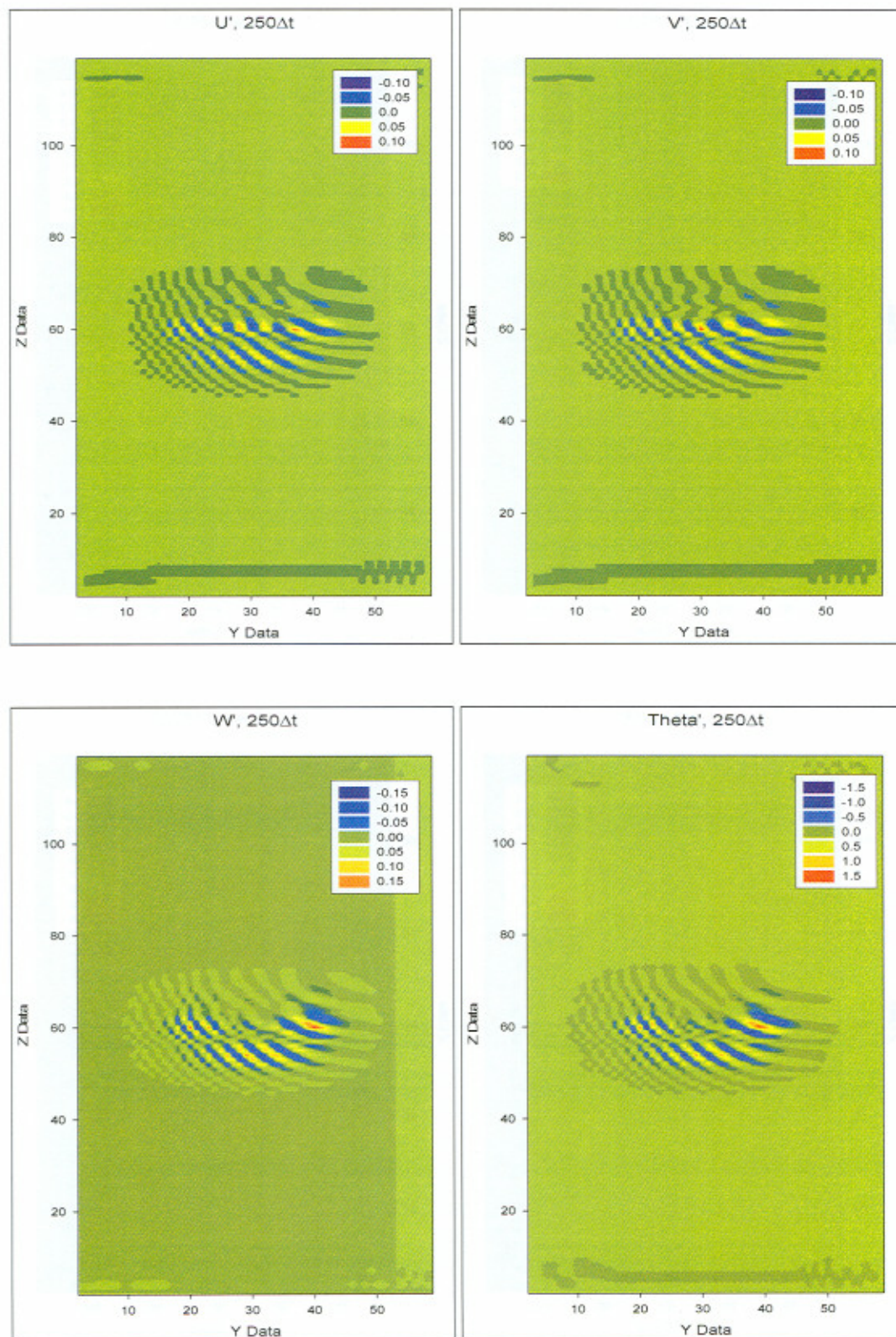


Fig. VII.15- Se muestran las gráficas para las perturbaciones turbulentas de las variables u , v , w y Θ (temperatura potencial) para el momento $250\Delta t$. Planos YZ.

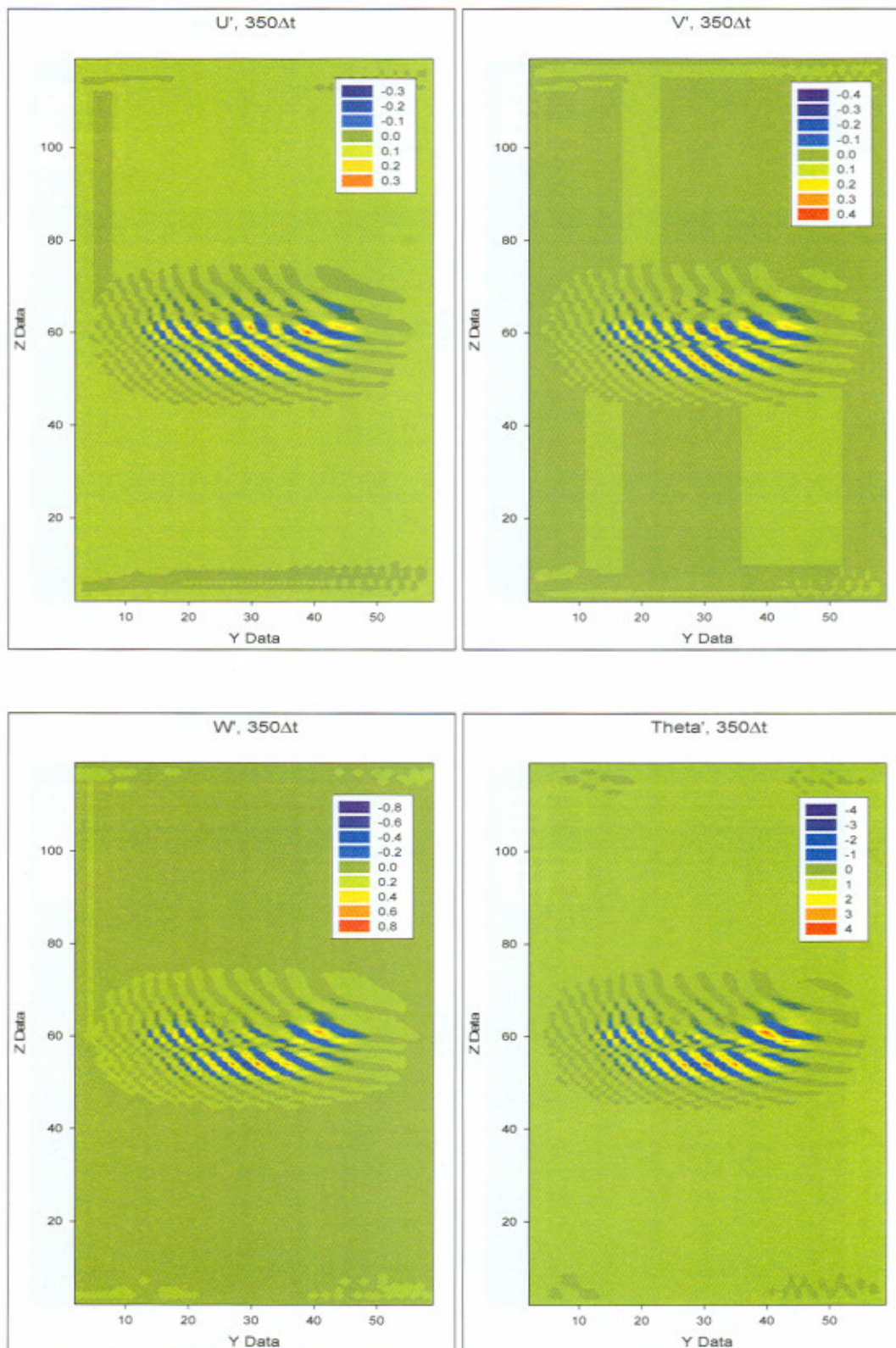


Fig. VII.16- Se muestran las gráficas para las perturbaciones turbulentas de las variables u , v , w y Θ (temperatura potencial) para el momento $350\Delta t$. Planos YZ .

VII.2.9 COMPONENTES PUNTUALES DEL ROTACIONAL. TERCERA FASE.

Las Figuras VII.17 y 18 informan acerca de la distribución espacial para las evoluciones temporales de las tres componentes del vector rotacional de la velocidad en los instantes 250 y $350\Delta t$. Se observa que:

- a) Al igual que las perturbaciones turbulentas de la velocidad, las componentes primera y segunda, muestran mayor actividad turbulenta en la zona en la que se instaló el vórtice inferior.
- b) Quizá merezca la pena destacar que la primera componente del rotacional pasa de la zona afectada por las perturbaciones generadas por el vórtice central a las generadas por el vórtice inmediato superior sin que se observe ya, prácticamente, una zona de transición.
- c) Esta misma situación es observable para la segunda componente del rotacional, mientras que la tercera no presenta una situación similar, en su gráfica no es posible discriminar las zonas de actividad turbulenta donde se habían ubicado los vórtices superior e inferior.
- d) Una segura razón de este comportamiento se encuentra en la estructura matemática que caracteriza cada una de las componentes del rotacional de la velocidad. En las dos primeras aparecen variaciones de la w mientras que en la otra no. Según se vio, la componente w seguía comportamientos diferentes de los presentados por la u y la v ; Figura VII.13 por ejemplo.
- e) En $350\Delta t$ los efectos mencionados se repiten intensificando las diferencias comentadas en los apartados anteriores.

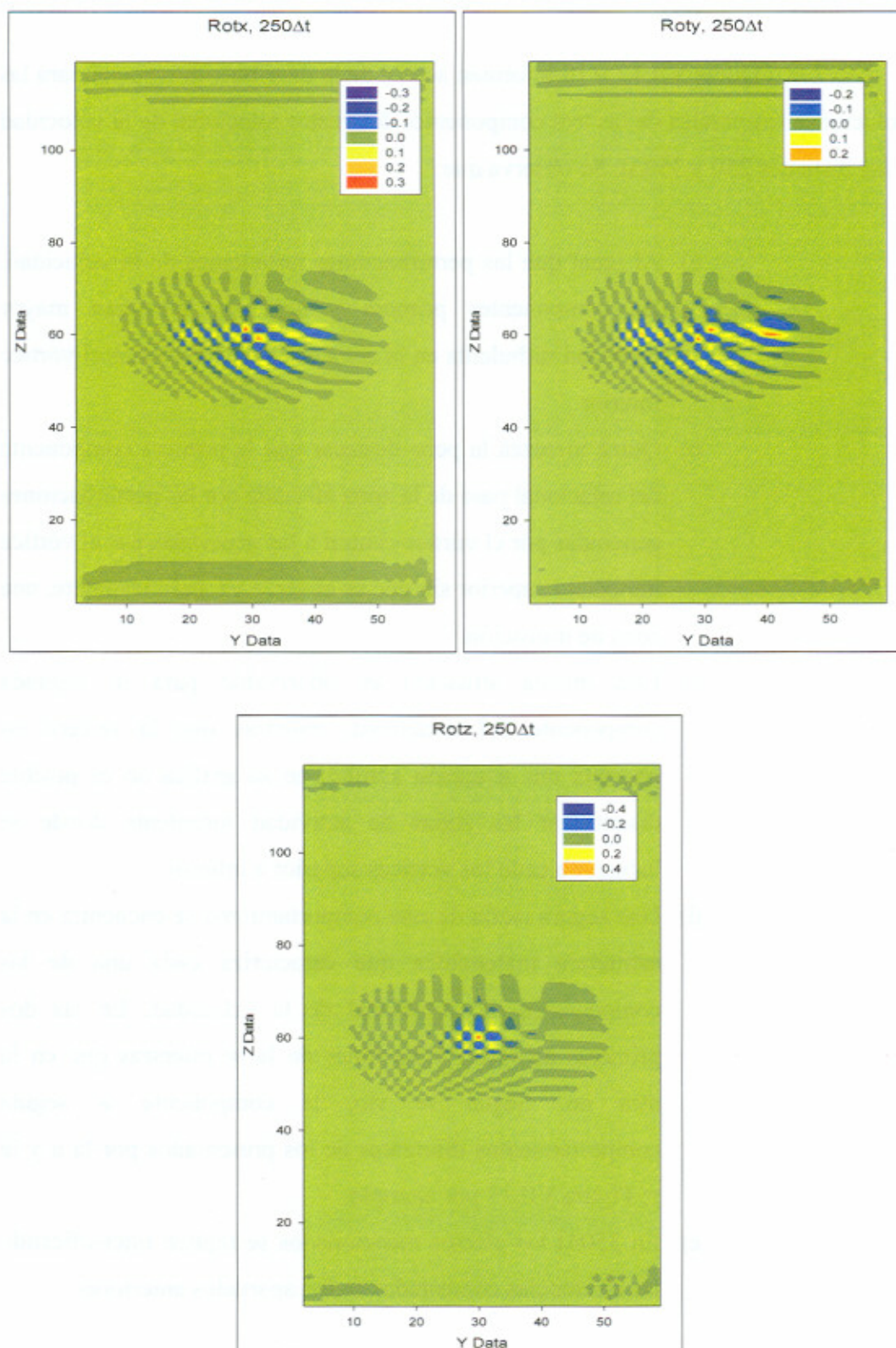


Fig. VII.17- Se muestran las gráficas para las componentes del rotacional de la velocidad (Rotx, Roty, Rotz) para el momento $250\Delta t$. Planos YZ.

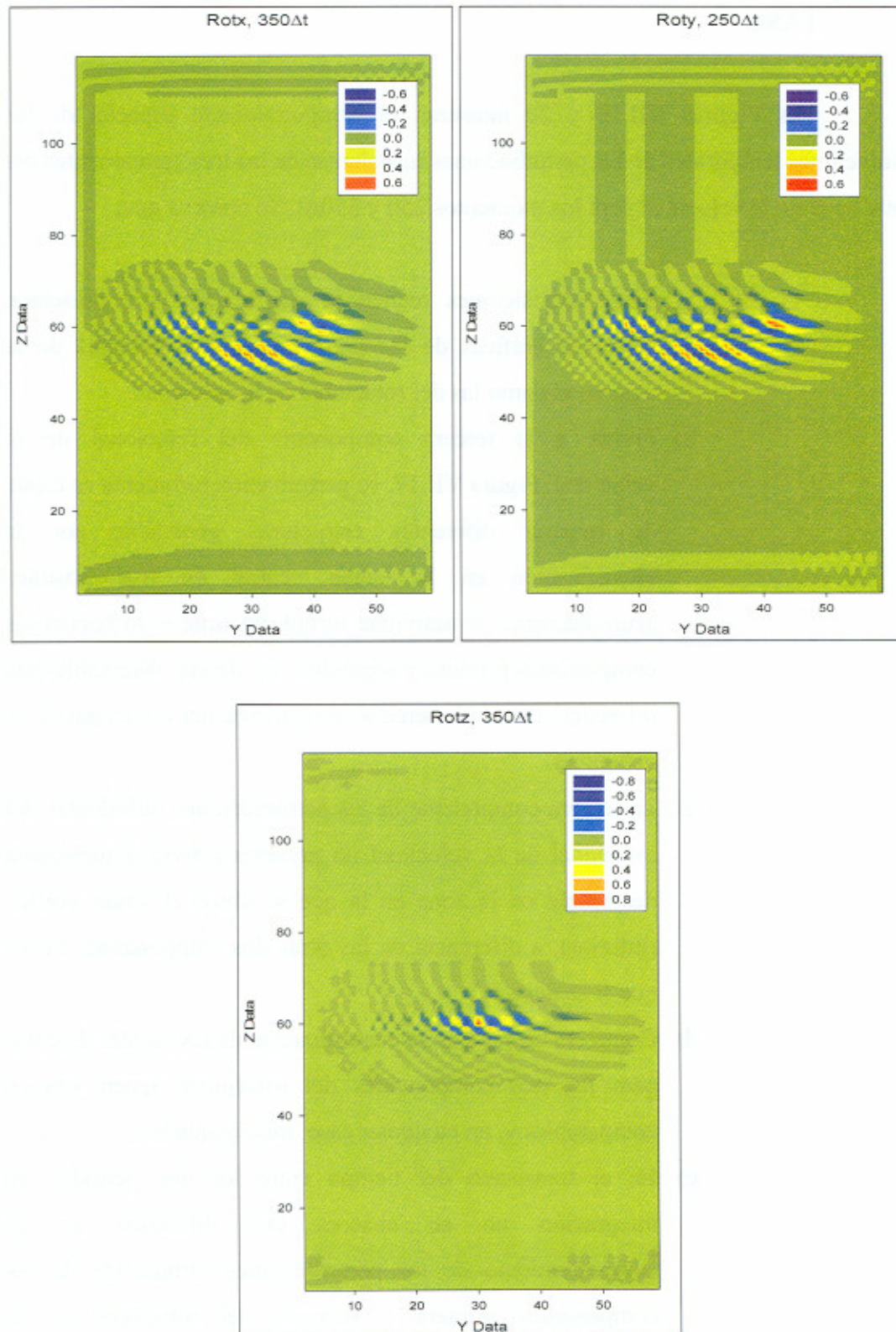


Fig. VII.18- Se muestran las gráficas para las componentes del rotacional de la velocidad (Rotx, Roty, Rotz) para el momento 350Δt. Planos YZ.

VII.2.10 PERTURBACIONES TURBULENTAS DEL ROTACIONAL. TERCERA FASE.

Las Figuras VII.19 y 20 muestran el comportamiento espacial de las evoluciones temporales de las perturbaciones turbulentas de las tres componentes del rotacional de la velocidad para los momentos 250 y 350 Δt . Se observa que:

- a) Estas exposiciones reúnen la información que presentan tanto las gráficas de las perturbaciones turbulentas de la velocidad como las del rotacional de la velocidad.
- b) Frente a la tercera componente del rotacional de la velocidad, Figura VII.17, su perturbación turbulenta es capaz de mostrar diferentes estructuras generadas por la identificación en la banda central de tres posibles acumulaciones de actividad turbulenta (que sí lo hacían las componentes primera y segunda). No siendo observable esta diferenciación en la tercera componente del rotacional de la velocidad.
- c) La tercera componente de las perturbaciones turbulentas del rotacional de la velocidad no presenta actividad turbulenta destacable en la zona en la que se ubicó el tercer vórtice (inferior), a diferencia de las otras dos componentes en las que sí se destaca.
- d) Como era de esperar, la cuantificación de las escalas de color para las tres componentes del rotacional tienen valores comparables y, en cualquier caso, muy pequeños.
- e) En el transcurso del tiempo entre los dos períodos de integración no se observa una diferencia en el comportamiento de las perturbaciones turbulentas de las componentes primera y segunda del rotacional de la velocidad digna de mención especial, salvo si acaso el incremento espacial de la zona afectada por la perturbación.

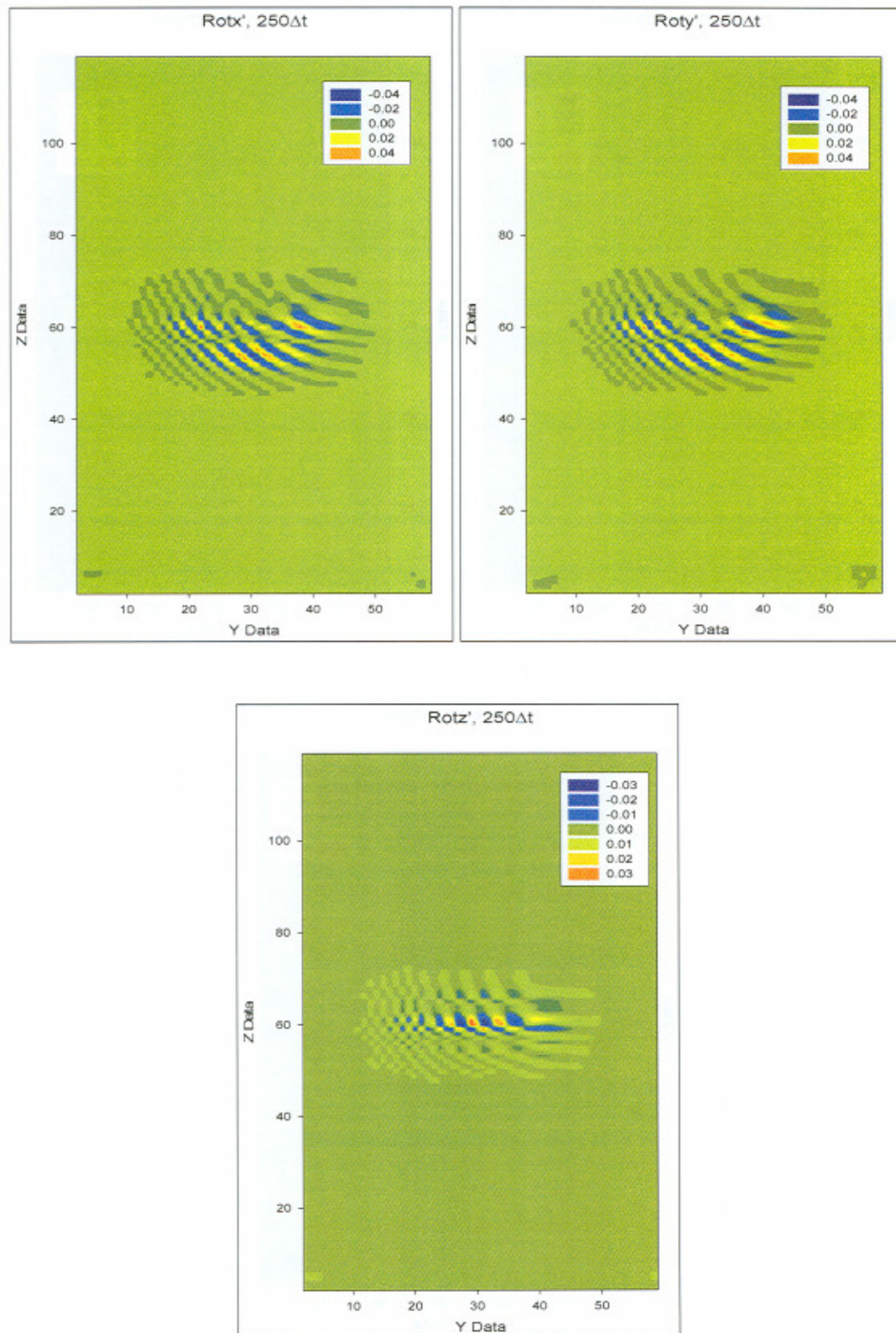


Fig. VII.19- Se muestran las gráficas para las perturbaciones turbulentas de las componentes del rotacional de la velocidad ($Rot'x$, $Rot'y$, $Rot'z$) para el momento $250\Delta t$. Planos YZ.

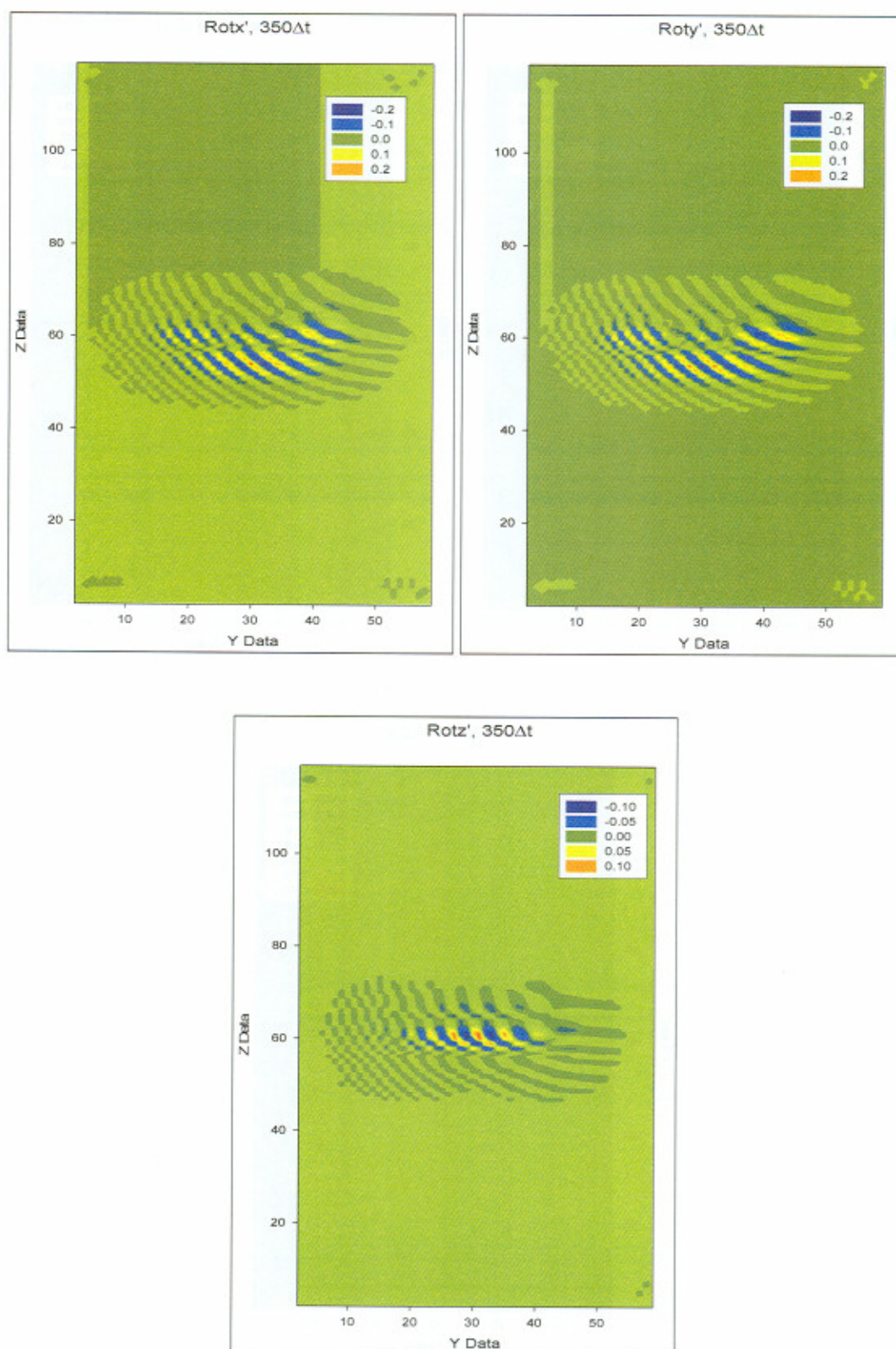


Fig. VII.20- Se muestran las gráficas para las perturbaciones turbulentas de las componentes del rotacional de la velocidad (Rot'_x , Rot'_y , Rot'_z) para el momento $3250\Delta t$. Planos YZ.

La Figura VII.21 muestra el comportamiento para el instante $150\Delta t$ de la primera componente del campo de velocidad y de su perturbación turbulenta en planos XY. Si comparamos esta figura con la Figura VI.49 se observa que la información es prácticamente idéntica, lo cual concuerda con que el plano horizontal situado en el centro de la malla contiene información casi exclusivamente del desarrollo del vórtice central, reafirmando comentarios establecidos con anterioridad sobre los planos horizontales $z=60$ del caso de tres vórtices. Desistimos de mostrar otras figuras en estos planos por las razones expuestas.

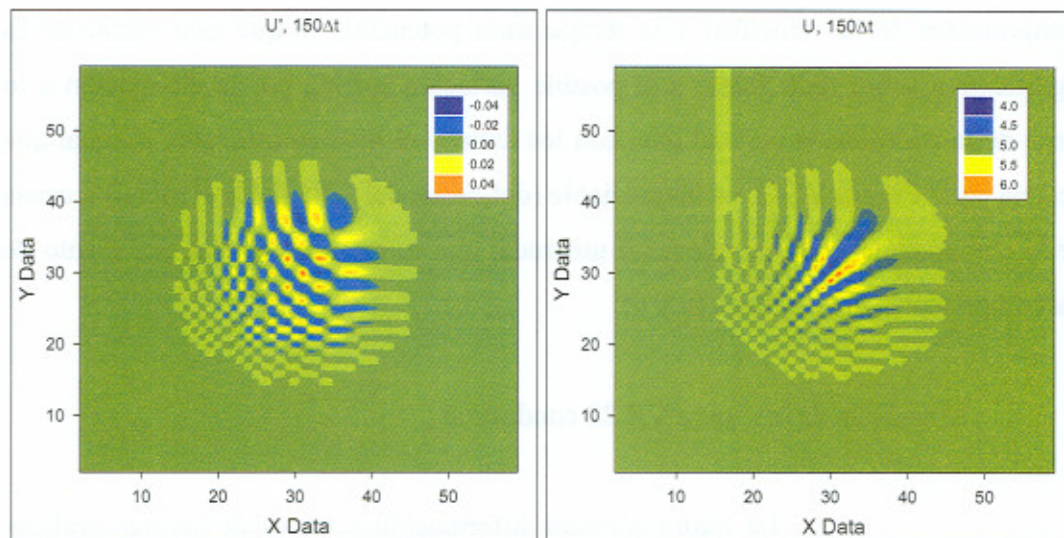


Fig. VII.21- Se muestra un ejemplo de comportamiento horizontal para el caso de tres vórtices en el instante $150\Delta t$. Primera imagen perturbación turbulenta de la componente u del campo de velocidades; segunda imagen componente u del campo de velocidades. Planos XY.

VII.2.11 ESTUDIO DE LA ELONGACIÓN DE LOS TRES VÓRTICES.
PROCESO COMPLETO.

La Figura VII.22 muestra las evoluciones temporales de la elongación horizontal de la zona afectada de la malla por el desarrollo simultáneo de los tres vórtices instalados inicialmente. Se utilizan simultáneamente las gráficas de crecimiento de u , v , w y θ .

Se ha elegido el crecimiento horizontal como indicativo de la elongación de los eddies turbulentos identificados a través de la vorticidad mediante las componentes de la velocidad y la temperatura potencial, ya que esta variación es significativa sobre todo frente a la posible variación sufrida por la elongación a lo largo de la coordenada vertical que, con los datos y el modelo utilizado, al igual que ocurría en la Figura VI.42, es inapreciable (del orden del 10% del horizontal) a causa de la componente w de la velocidad utilizada, que es en torno al diez por ciento de las componentes horizontales (u y v).

El análisis de la Figura VII.22 conduce a:

- a) La figura contiene información a través de las tres gráficas que la constituyen del crecimiento horizontal, no solo de un vórtice como ocurría en la Figura VI.42, sino que se ha analizado dicho crecimiento en los niveles en los que inicialmente se situaron los vórtices de este caso; a saber, 54, 60 y 66.
- b) Para cualquiera de las variables utilizadas los ajustes lineales se comportan bastante bien (coeficientes de regresión muy altos).
- c) La cuantificación del crecimiento es la misma para cualquier variable y para cualquier nivel, ya que la pendiente de las rectas de ajuste se encuentra en torno a 0'11 lo cual supone un crecimiento del 11%. La variable que más se aleja de este crecimiento es la w a la altura del nivel 66, que resulta ser aproximadamente del 10%.

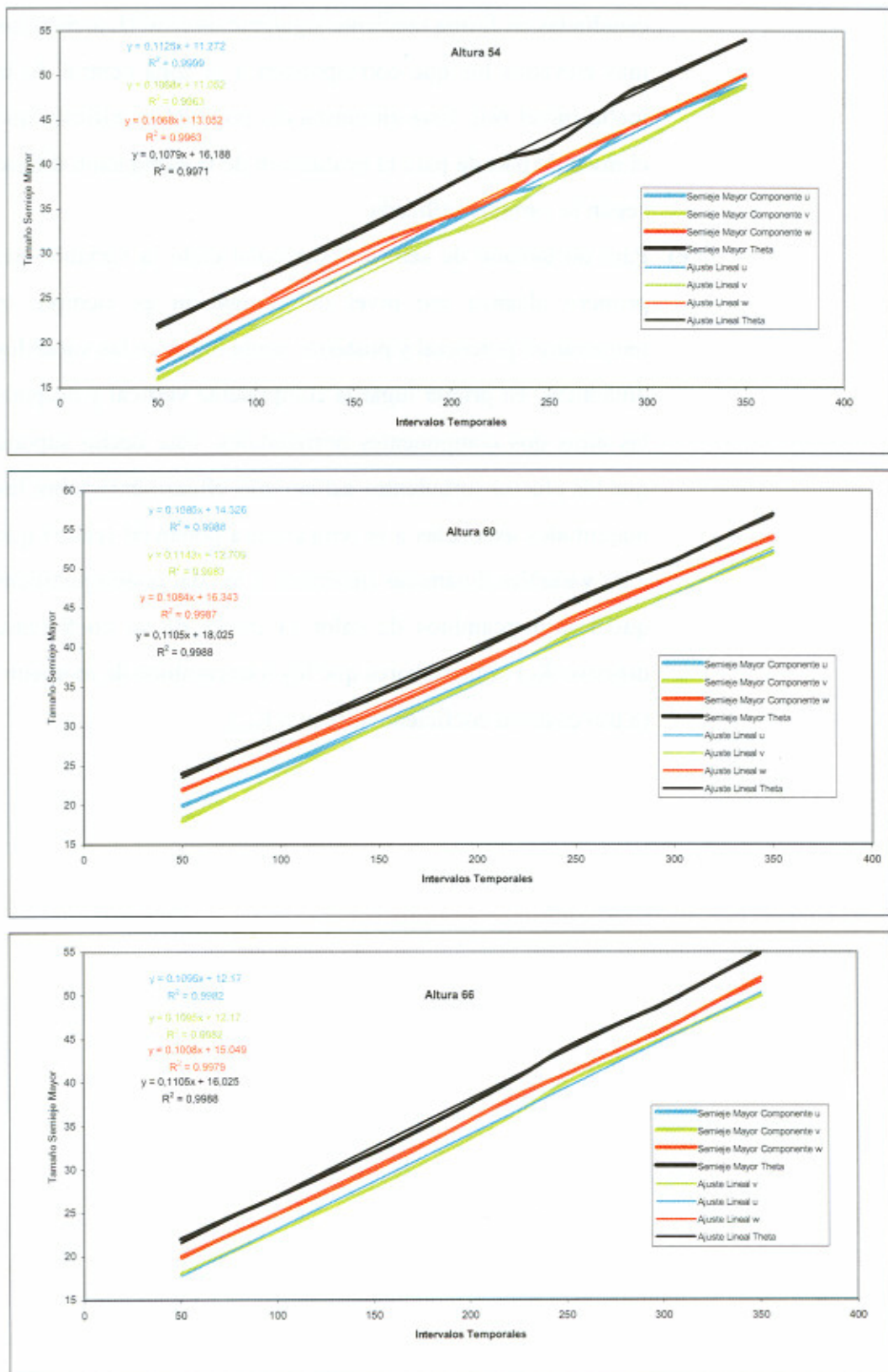


Fig. VII.22- Ajustes lineales para el crecimiento de la coordenada horizontal y (elongación) del tamaño de la zona afectada por los vórtices instalados en los niveles 54, 60 y 66 de la malla para la tercera fase de integración del modelo. Variables ajustadas: u, v, w y θ . La leyenda interior especifica el ajuste de cada variable y los parámetros numéricos del mismo. El tamaño está medido con el número de celdillas afectadas y el tiempo en Δt .

- d) Los términos independientes aparecen para las tres zonas estudiadas en forma creciente siguiente $u \approx v < w < \theta$, siendo los más elevados los que corresponden a la zona central de la malla (nivel 60). Esta circunstancia pone de manifiesto que el nivel de partida para la evaluación de la elongación difiere según la variable utilizada.
- e) Para un tamaño de semieje horizontal dado la variable que primero alcanza ese nivel de elongación es siempre la temperatura potencial y posteriormente lo hacen las variables dinámicas, en primer lugar la componente vertical y después las otras dos componentes horizontales. Este hecho supone que los efectos turbulentos actúan más eficazmente sobre las magnitudes asociadas a la temperatura potencial (calor) que a las variables dinámicas (momento), lo cual podría justificar que los intercambios de calor (a través de su coeficiente difusivo K_h) sean mayores que los intercambios de momento (a través de su coeficiente difusivo K_m).

VII.2.12 PROYECCIONES 2D DE LOS VECTORES VELOCIDAD Y ROTACIONAL DE LA VELOCIDAD. TERCERA FASE.

La Figura VII.23 muestra el comportamiento de las proyecciones del vector velocidad en planos YZ y XY para los instantes 250 y 350 Δt , comparables a las mostradas en las Figuras VI.31 y 32. Para el caso de estas últimas no se mostraron las correspondientes a los momentos 50, 150, 250 y 350 Δt , tercera fase de integración, puesto que la información era prácticamente la misma con perturbaciones más acentuadas, pero partiendo todas de la zona central de malla donde se había ubicado el único vórtice perturbador de la misma.

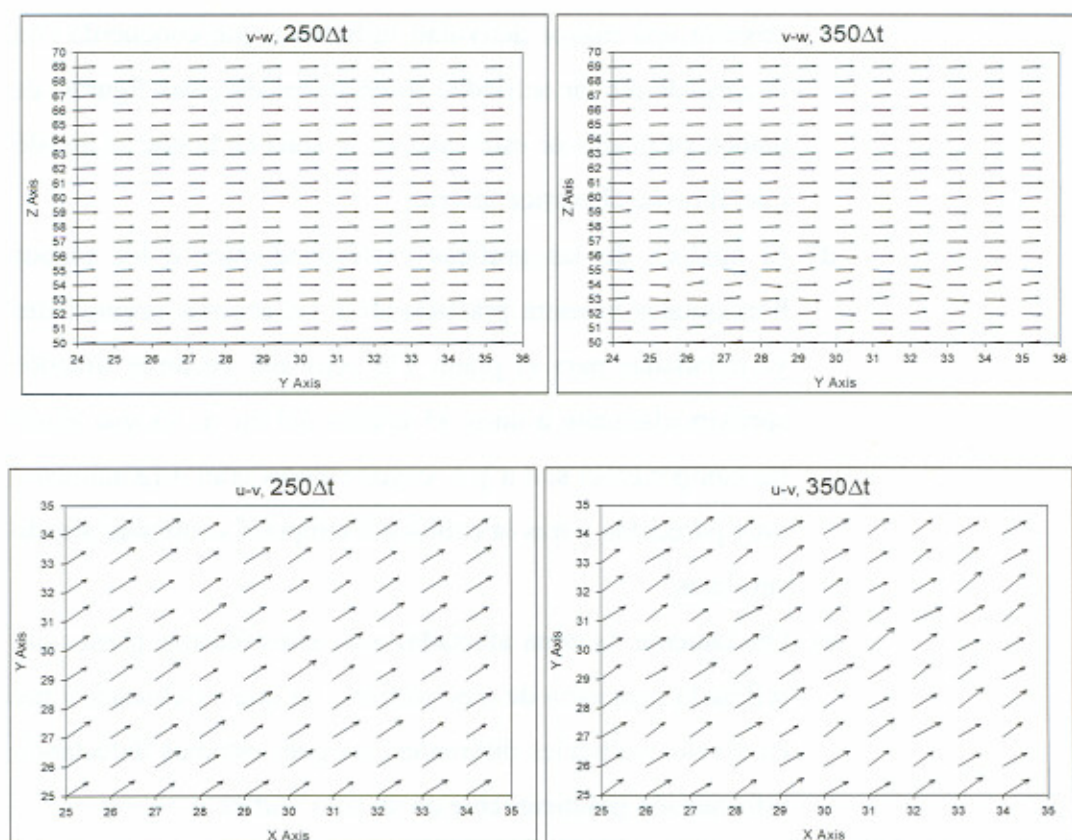


Fig. VII.23- Muestra de los momentos de integración 250 y 350 Δt de las proyecciones en planos YZ (arriba) y XY (abajo) del vector velocidad como salida del modelo. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 10:1.

- a) Dado que ahora la estructura corresponde a tres vórtices iniciales situados en los niveles 54, 60 y 66 las gráficas seleccionadas muestran el crecimiento de las zonas afectadas

por las perturbaciones generadas por esos vórtices, así como la intensificación del fenómeno.

- b) Las proyecciones en planos YZ presentan un grado de dificultad de análisis añadido ya que aparentemente todos los vectores representados serían horizontales, lo cual no es literalmente cierto, ya que tienen una componente vertical de la velocidad aunque muy pequeña en comparación con la horizontal, de manera que las perturbaciones inducidas según el párrafo anterior son observables casi exclusivamente en la longitud de esos vectores.
- c) En $350\Delta t$ y en la banda horizontal centrada en el nivel 54 se observa una mayor actividad turbulenta que concuerda con la zona de mayor actividad reseñada en diversas figuras, de planos verticales de este caso, en la zona en la que se instaló inicialmente el vórtice inferior.
- d) El análisis de las gráficas correspondientes a los planos horizontales muestra prácticamente las mismas propiedades ya detalladas para el plano YZ pero con vectores situados aproximadamente a unos 45 grados del eje x, ya que ahora las componentes son u y v, cuyos valores eran originalmente muy parecidos y tras la evolución temporal continúan siendo similares.
- e) Obviamente, la zona afectada, para estos últimos planos, no refleja la presencia de tres vórtices, ya que su ubicación fue en niveles verticales diferentes; así pues estamos detectando información prácticamente de un solo vórtice.
- f) Se muestra, en la Figura VII.24, la comparación entre los mismos instantes de integración de las proyecciones en planos XY del vector velocidad para un solo vórtice (gráfica izquierda) y tres vórtices (gráfica derecha). Esta comparación confirma lo expuesto en el apartado anterior.

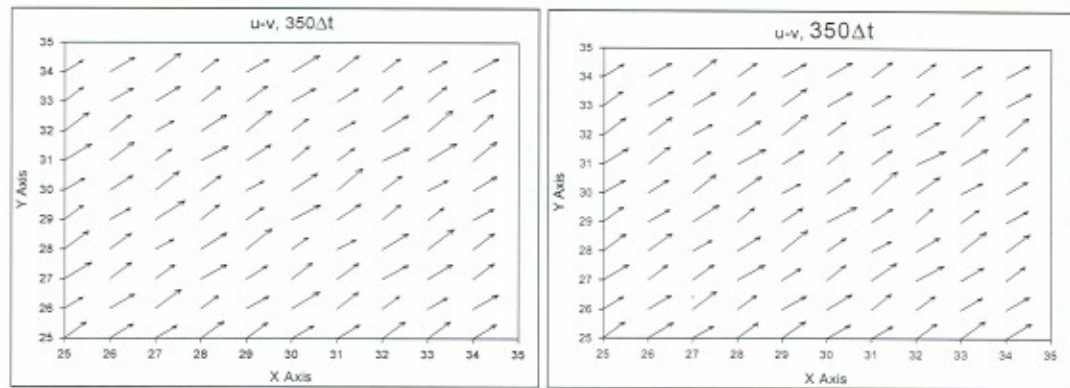


Fig. VII.24- Muestra comparativa del momento de integración $350\Delta t$ de las proyecciones en planos XY del vector velocidad como salida del modelo para el caso de un vórtice inicial (izquierda) y tres vórtices (derecha). Obsérvese que la distribución espacial es prácticamente idéntica. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 10:1.

La Figura VII.25 muestra las proyecciones del vector rotacional de la velocidad sobre planos XY (izquierda) y YZ (derecha) para los momentos de integración 150, 250 y $350\Delta t$.

- Al igual que en gráficas anteriores los planos XY informan prácticamente del efecto de un solo vórtice (el instalado en el nivel 60 inicialmente).
- El transcurso del tiempo desde 150 hasta $350\Delta t$ se traduce en los planos XY en una intensificación del efecto de la turbulencia sobre el rotacional que conduce a una distribución, en la última gráfica, interesante ya que se observan zonas puntuales de acumulación de vorticidad con aspecto muy irregular de las componentes reseñadas.

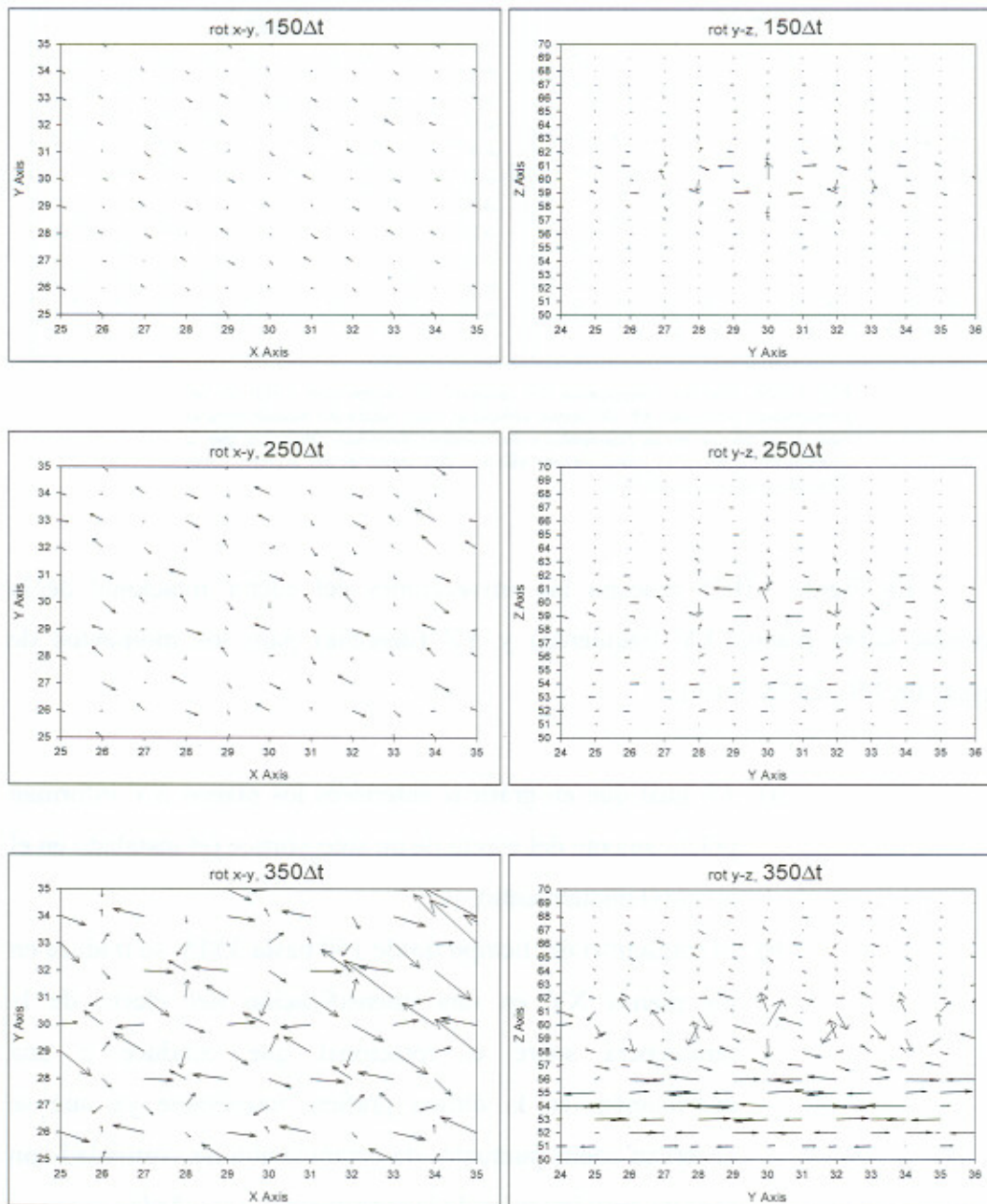


Fig. VII.25- Muestra de los momentos de integración $150, 250$ y $350\Delta t$ de las proyecciones en planos XY (izquierda) y YZ (derecha) del vector rotacional de la velocidad como salida del modelo. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 1:2

- c) El transcurso de tiempos de integración tan extenso, según se ha explicado en el apartado anterior, admite destacar que la irregularidad de distribuciones es notable. Se han hecho comparaciones con el mismo instante de integración y plano XY para el caso de un único vórtice (gráfica izquierda, Figura VII.26).

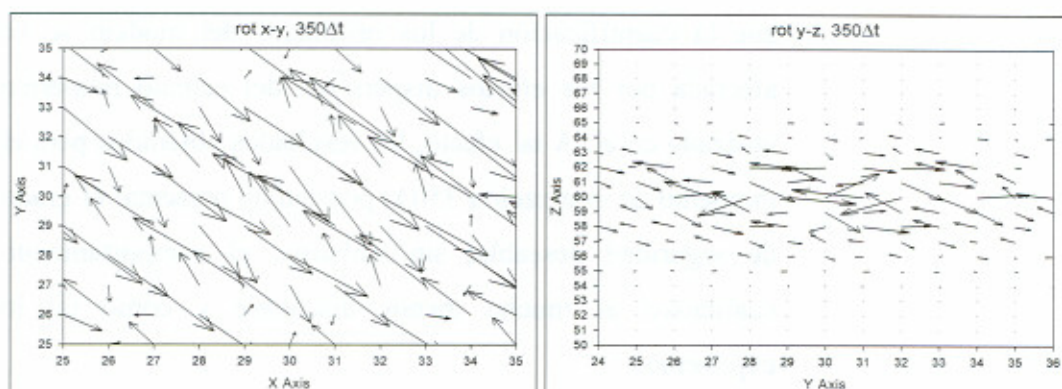


Fig. VII.26- Caso de un único vórtice. Muestra del momento de integración $350\Delta t$ para las proyecciones en planos XY (izquierda) y YZ (derecha) del vector rotacional de la velocidad. Los trazos de los vectores están dibujados con una escala 1:2.

- d) La irregularidad que en el momento $350\Delta t$ presentaba la distribución espacial de las componentes primera y segunda del rotacional de la velocidad es también notable pero diferente de la que ahora se destaca (apartado b), lo cual es debido, lógicamente, a la instalación de los otros dos vórtices para el caso de los tres iniciales; es decir, aunque a lo largo de muchos de los instantes mostrados el desarrollo en planos horizontales ha sido semejante con uno y con tres vórtices, incluso hemos referenciado en algunos apartados que los dos vórtices extremos instalados inicialmente no parecían afectar a la distribución de velocidades, es notable que en el campo de la vorticidad, ahora, sí tengan influencia en el desarrollo de ellos, así como en el del central según se observa en la Figura VII.25, desde el punto de vista de las componentes x e y del rotacional.
- e) Las tres gráficas que muestran las componentes y y z del rotacional de la velocidad (Planos YZ) para los momentos 150, 250 y $350\Delta t$ muestran una notable influencia desde los primeros momentos que se ve magnificada según avanza el tiempo hasta que en el momento $350\Delta t$ observamos una distribución muy diferente de cualesquiera de las otras hasta ahora mostradas.

- f) Recordemos, tal como se estableció al final del capítulo VI, que la cuantificación de los resultados del modelo se ve afectada por los efectos dispersivos del cálculo numérico utilizado en él. A tal efecto, los resultados obtenidos para el momento de integración $350\Delta t$ podrían no presentar el grado de seguridad deseable; sin embargo, el comportamiento cualitativo es mucho menos discutible y como tal lo exponemos.
- g) La observación en planos verticales confirma la aparición de una zona turbulenta, poco activa –aunque mucho mayor que en el caso de un solo vórtice, gráfica derecha, Figura VII.26–, en torno a la posición del nivel 66 (ubicación inicial del primer vórtice).
- h) Como confirmación de los apartados b y d, observamos en el entorno de la banda central ($z=60$) una actividad turbulenta menor en el caso de tres vórtices (gráfica derecha, $350\Delta t$, Figura VII.25) que en el de un único vórtice (gráfica derecha, Figura VII.26). Calificamos de menor esta actividad por la observación de diferencias en el tamaño de los vectores que caracterizan la proyección del vector rotacional de la velocidad en el plano YZ y sobre todo (y especialmente) por las notables diferencias en los ángulos de dichos vectores.
- i) Por último, destacamos la gran diferencia de comportamiento entre la zona inferior (entorno del nivel 54) para el caso de un vórtice (gráfica derecha, Figura VII.26) y para el de tres (gráfica derecha, $350\Delta t$, Figura VII.25). En este último caso es interesante observar que los efectos sobre las componentes dibujadas no afectan prácticamente al ángulo –la mayoría de los ángulos, incluso en $250\Delta t$, son 0 ó 180– y sí, en gran medida, al módulo de las mismas.

Hecha la exposición del trabajo realizado hasta este momento no queremos dejar de mencionar que el modelo se ha utilizado en algunos casos más (6 vórtices, 9 vórtices, etc.), así como bajo otras condiciones dinámicas diferentes (campos de velocidad distintos hasta ahora), incluso un caso de alteración sólo en la temperatura potencial (no en los campos dinámicos) y con diferentes tipos de ubicaciones horizontales y verticales. Aprovechando los diferentes términos que construyen cada una de las ecuaciones modelizadas también se han evaluado otros efectos físicos sobre operadores relacionados con la conservación de la masa, de la energía y muchos estudios más que no han aportado, en nuestra opinión, elementos diferenciales para el campo de velocidades ni para el de vorticidades. Por esta razón no se han señalado especialmente en esta memoria. Sin embargo queda abierta, por nuestra parte, la posibilidad de continuar con este tipo de estudios para conseguir obtener mejoras en el conocimiento de la turbulencia y en el acercamiento a las características físicas de la misma.

Pasamos, por último, a la elaboración de un resumen ordenado de las principales conclusiones obtenidas en este trabajo, así como de futuros trabajos que perfeccionen y mejoren esta técnica de aproximación a la turbulencia.

CHAPTER VIII
CONCLUSIONS, ABSTRACTS & FUTURE

VIII.1 GENERAL CONCLUSIONS AND ABSTRACTS

In this work it has been proposed the numerical resolution of the system of equations of motion, continuity and energy for the turbulent regime scheduled on the theoretical basis of using specifically the effect of the turbulent vorticity.

As we described in the chapter of introduction we have proposed an interpretation of the turbulence through the use of vorticity or rotational of velocity so the turbulent perturbations of the field of velocities and field of vorticity are sources to the same kind of turbulent flow.

During the chapter IV we have developed a series of new equations related with the turbulent vorticity focus on obtaining system of equations much better adapted to the microphysics associated to the turbulent regime. We could remark the equation of energy with rotational transports. The continuity equation and diffusion one have been also developed with vorticity effects.

We have used the hypothesis of solidary rotation and we are able to describe the theoretical development of a threedimensional (3D) eddy or a group of eddies that are inside of a bigger eddy.

Through the budget of turbulent and viscosity energies and assuming the generic motion is constituted by a kind of rotation and deformation effects we have proposed a nondimensional parameter to differentiate those independent effects. It is possible to use this parameter to the analysis of substrates in a Boundary Layer.

We have obtained several theoretical properties using some approximations and any usual hypothesis, like for example some classical theories related to the turbulence (mixing length, coefficients of interchange, coefficients of turbulent viscosity, etc.). In the chapter IV some of them have been showed analytically, e.g., the relation among the different components of turbulent vorticity ($\zeta' + \eta' = \xi'$), the relation among the components of pressure gradient

$(-u \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x})$ and so on. The usually used hypothesis correspond to isotropy, $\bar{u} = \bar{u}(y, z)$ and $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}, 0, 0)$, besides of 3D considerations of a mixing length.

Practically we have got to show explicitly the rotational of velocity and its turbulent perturbation in all theoretical equations. As we think this kind of terms are the responsible of the turbulence through the rotation of the fluid particles.

After the theoretical development, in the Chapter V, we have used the spatial and temporal discretization to solve numerically the corresponding equations. As every numerical models our proposal manages to inevitable numerical errors that separate us from the reality of any actual problem about Fluid Mechanics.

The used mesh after several studies has been $60 \times 60 \times 120$ taking account the computer possibilities, an easier system of discretization and numerical dispersion of the model related with the CFL and stability conditions. In the central point of the grid we have placed different components of velocity of the rest of the mesh points.

As we have showed in the Chapter V the boundary conditions allow us to manage the whole size of the mesh through the temporal integration.

The main innovation is the direct use of the system of equations with the only restriction that comes from the decomposition of Reynolds in average and turbulent perturbed values to the different physic magnitudes of velocity field, that is, u , v and w ; the rotational field, that is, ζ , η and ξ and the potential temperature field, θ . We don't use any kind of parameterization therefore we are able to think that the development will be more appropriated to the analysis of the microphysics related with the turbulent phenomena. The motion is describe by the system of used equations is: Navier-Stokes (laminar flow) and turbulent regime. We think we might be able of considering this model as DNS one, because we don't propose any parameterization.

The proposed application has been solved through three different phases of integration. Being the initial conditions proposed in the first phase. We want to highlight the average values of any variables are spatially calculated with 7 neighbour points in the first phase. With just a temporal integration (using Navier-Stokes to get the punctual values) we reach the second phase, in which the average

values similar to $\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}}$ are spatially calculated with 7 points again, however the

terms similar to \bar{u} through the turbulent systems of equation 4.49 or 4.50 including the laminar and buoyancy effects, the punctual values are still calculated with the Navier-Stokes equations obviously. When finally the model reaches the third phase,

that is, fully developed turbulent stage, we propose using the system of equations 4.49 or 4.50 to calculate the punctual values meanwhile to obtain the average values we have used temporal averages with 10 cases.

Where we need it we propose the ergodic flow during the first and second phases, therefore through the Birkhoff theorem it is possible to calculate the temporal average values as spatial average values.

We also propose as discretization model the centred differences one to the spatial increments and the advanced difference one to the temporal increments. In the same way the average values are calculated depending on which temporal phase we are as we have already explained.

The main obtained results are:

I First case (one vortex)

- Numerical dispersion corresponding to the second temporal phase grow more drastically than the ones during the third phase. We propose reaching the last phase throw the 10% condition so.
- The study of the corresponding graphs evidences the growth of the affected zone for the vortex in planes YZ and XY using the variables $u, u', w, w', \theta, \theta'$ for the moments 1, 5, 10, 20 (characteristic of second phase), 50, 150, 250 and 350 (idem for the third phase). It is observed a growth of the affected extension through oscillating numerical values in respect of the value of the zone of unaffected mesh neither for the borders neither for the vortex. As example Figures VI.2, 3, 4...
- The zone of alteration of the field of velocities in vertical planes grows more horizontally than vertically (because the horizontal velocity is close to 5 while the vertical is close to 0.5). The same alteration of velocities in horizontal planes evidences a relative constancy of sizes because $(u,v)=(5,5)$; in fact it is possible to find a zone (bisecting line) that delimits the same behaviour at both sides (Figure VI.6).
- If we study numerically the behaviour of the perturbed field of velocity and U_{med} (average velocity) we found three possible zones located in the U_{med} figure (Figure VI.8). The inner one corresponds to the development of turbulent perturbations (third zone), the outer one to the non perturbed velocity (first zone) and the other one to the transitional effects (second zone)

among the turbulent zone (inner) and the non turbulent one (outer). The characterization fields of the three zones are:

- | | |
|-----------------------|--|
| a. First Zone | $u_{ma}=u=\bar{u} \rightarrow u'=0$ |
| b. Second Zone | $u_{ma} \neq u=\bar{u} \rightarrow u'=0$ |
| c. Third Zone | $u_{ma} \neq u \neq \bar{u} \rightarrow u' \neq 0$ |

being u_{ma} non perturbed velocities, $U_{med} = \bar{u}$ and u the punctual values of the velocities.

- The simultaneous analysis of the figures VI.9, 10 and 11 doesn't evidence any kind of relation between the behaviour of the development of the variables u' , v' and θ' at least until the $20\Delta t$. Later, it will be described the modification of this conclusion when the temporal increments advance through of the third phase of integration.
- In the same chapter the behaviours and temporary evolutions of the components of the vector vorticity (Rotv) have been also showed at the same moment $20\Delta t$ (Figures VI.15, 16, ...) although afterwards it is analyzed to $350\Delta t$. An increase of sizes of the affected zones by the development of the vortex has been observed in planes YZ and XY reaching to constitute a image of similar aspect to the one belonging to the field of velocities. Also it is possible to observe the alternations of bigger and minor values than the one of the mesh not altered.
- We have also drawn vertical profiles (Figures VI.18 and 19) placed in the central line ($x=30$, $y=30$) in those graphs it is observed an important increase near the point $z=60$ decreasing toward the vertical extremes of the mesh to disappear. This agrees with the showed observations in previous graphs.
- In the figures VI.24, 25, 26, 28, 29 and 30 we have showed the behaviour of the perturbed component of vorticity in planes YZ and XY. As it has been described when these graphs were narrated we have observed perfectly comparable behaviours to the showed for the fields of velocity and for theirs turbulent perturbations. In fact the figure VI.27 represents the information of the three different zones specified beforehand.

Once the corresponding observations have been summarized during the second phase of integration, in the case of one vortex, we proceed to summarize the corresponding observations to the third phase of integration.

- In the figure VI.35 we have shown the graphic result of the connection technique, for the normalized variable of first and third components of the perturbed velocity with their average temporal, between the temporal evolutions at the second and third phase. Being remarkable the strong decrease of the dispersion of solutions when the system of equations of Navier-Stokes is abandoned.
- The aspects of the evolution to moments of integration very advanced ($350\Delta t$) are evidenced in the figures VI.38-40 (planes YZ) as in the VI.42-48 for the dynamic and thermic variables used in the model. The affected zone has grown now to occupy the whole available mesh horizontally, growing approximately only a 10% in vertical and so even the last step of integration considered in this memory. The showed elongation in horizontal planes (XY) allows us to observe the growth of the zone affected by the vortex to the practical totality of the space of available mesh.
- This horizontal elongation in the vertical planes YZ (Figure VI.41) has been analyzed with attention to detail for the four variables: u , v , w and θ . It is possible to conclude that this growth would be quantified as a 11 % of the growth using the minimum square fit. Another easily observable property is the first variable suffers alterations that is precisely the potential temperature and next the w . Being u and v the last variables that show this behaviour.
- The behaviour of the components of the rotational of velocity and their turbulent perturbations are showed in the figures VI.49-60. The similitude of structures with the dynamic variables u , v and w is remarkable as well as the relation between the turbulent perturbations of velocity and rotational. The observation of graphs for very advanced moments of integration in the third phase evidences in vertical planes that certain substructures begin to appear, also identifiable on the horizontal planes, being the component z of rotational of velocity the variable that later enables the observation of these new structures. As this differential behaviour has been indicated in the development of the text it would have the justification in the kind of

variations (and the used components to calculate them) used for the third component of rotational.

- Finally, the figures VI.61-64 have showed, for different moments of integration, several profiles of components of velocity and potential temperature, conveniently corrected to be observable simultaneously in different abscissae. The more important findings can be summarized in the easy observation of alternation of bigger and minor values than those of the points of mesh non altered and concretely the comparison of the figure VI.61 (profile u^* 350t) with the figure VI.63 (profile w^* 350t) evidence an approximately total uncouple between both variables, while the Figure VI.64 shows the overlap of profiles simultaneously of u^* and v^* with a near-perfect connection. Besides, the behaviour presented, in the aforementioned graphs, of the variables θ^* and w^* shows a good level of connection, like we wait.
- Ignoring the differences of scales of work, the Figure VI.67 has showed a real sounding with captive balloon of a part of Atmospheric Boundary Layer. In the aforementioned sounding the record of, e.g., the component v of velocity has been compared to the profiles that we have just commented. A fraction of this sounding admits a quite precise overlap on the obtained profile as a result of the model. The similarity that both lines present can have its origin in which the model would reproduce the presence of "a vortex" (turbulent eddy) comparable to turbulent perturbations of the field of velocity observed in the sounding.

II Second case (three vortexes)

- In the last part of the memory a complementary study to the previous case (a vortex) has been performed after the placement of two new vortexes vertically, both of them to 6 units of distance and with a minor alteration in the components of the field of velocity.
- Besides the affected zone by the extension of the proposed vortexes, the different vertical graphs that have constituted the development of this last chapter have revealed as the three initial vortexes have interacted among

them. The structures of development have been modified for this reason in relation to the ones that the case of a vortex presented.

- It is remarkable the asymmetry of vertical behaviours of the three vortexes while the results of the model in horizontal planes ($z=60$) have showed a practically equal behaviour to the first case (Figure VII.21).
- It is also remarkable in this summary (Figure VII.22) the horizontal elongation for each of the initial vortexes keeps the level of growth, besides equal to the one that one unique vortex presented (11%).
- A detail of the future of the mentioned investigation in the chapter VII would be:
 - Future publications of developments right now contained in the memory
 - Proposal of more vortexes that have been indicated in the development of the previous chapters
 - Application software to evolutions and developments of the turbulence to concreated problems (aeronautics, hydraulics, tunnels of wind, atmospheric turbulence, ...)
 - Development of the numerical model so much in the incorporation of the rest of the equations like in the part relative to mathematical development of the system of discretization, mesh,...

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- ARAKAWA, A., 1966, Computational Design for Long Term Numerical Integration of the Equations of the Fluid Motion. Two Dimensional Incompressible Flow, Part I., J. Comput. Phys., 1, 119-43.
- BABIN, A., MAHALOV, A. And NICOLAENKO, B., 1996, Global Splitting integrability and regularity of 3D Euler and Navier-Stokes equations for uniformly rotating fluids, Eur. J. Mech. B/Fluids, 15, 291-300.
- BATCHELOR, G. K., 1953, The theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, England.
- BATCHELOR, G. K., 1967, An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Univ. Press.
- BENOIT, R., DESGAGNÉ, M., PELLERIN, P. PELLERIN, S. and CHARTIER, Y., 1997, The Canadian MC2: A Semi-Lagrangian, Semi-Implicit Wideband Atmospheric Model Suited for Finescale Process Studies and Simulation, Mon. Wea. Rev., 125, 2382-2415.
- BERMEJO, R., 1990, On the equivalence of semi-Lagrangian advective schemes and particle-in-cell finite element methods. Mon. Wea. Rev., 118, 979-987.
- BOHR, T., GRINSTEIN, G., JAYAPRAKASH, C. and HE, Y. 1987, Coherence, Chaos, and Broken Symmetry in Classical, Many-Body Dynamical Systems, Phys. Rev. Lett. 58, 2155-58.
- CANTWELL, B.J., COLES, D. and DIMOTAKIS, P. 1978, Structure and entrainment in the plane of symmetry of a turbulent spot, J. Fluid Mech. 87, 641-72.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. and ZANG, T. A., 1988, Spectral Methods for Fluid Dynamics, Springer, Berlin.

CANUTO, V. M., 1996, Turbulent convection: old and new models, *Astrophys. J.*, 467, 385-96.

CANUTO, V. M., 1998, Turbulence in Astrophysics: Stars, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30, 167-98.

CANUTO, V. M., and MINOTTI, F., 1992, Stratified Turbulence in the Atmosphere and Oceans: A New Subgrid Model, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 50, No. 13, 1925.

CARRIÓ, G. G. and NICOLINI, M., 1999, A double moment warm rain scheme. Description and test within a kinematic framework, *Atmospheric Research*, 52, 1-16.

CARRIÓ, G. G. and NICOLINI, M., 2000, A predominant mass preserving scheme for the microphysics of convective clouds. *Proc., 13th Intern. Conf. On Clouds and Precipitation*, Reno, Nevada USA, 14-18 August 2000, 514-17.

CHARNEY, J. G., FJÖRTOFT, R. And VON NEUMANN, J., 1950, Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation, *Tellus*, 2, 237-54.

CHORIN, A. J., 1994, *Vorticity and Turbulence*, Springer-Verlag, New York.

CLARK, T. L. and FARLEY, R. D., 1984, Severe Downslope windstorm calculations in two and three spatial dimensions using anelastic interactive grid nesting: A possible mechanism for gustiness, *J. Atmos. Sci.*, 41, 329-50.

CLARK, T. L. and HALL, W. D., 1991, Multi Domain Simulations of the Time Dependent Navier-Stokes Equations: Benchmark error analyses of some nesting procedures, *J. Comp. Phys.*, 92, 456-81.

CÔTÉ, J., GRAVEL, S. and STANFORTH, A., 1990, Improving Variable-Resolution Finite-Element Semi-Lagrangian Integration Schemes by Pseudostaggering, *Mon. Wea. Rev.*, 118, No 12, 2718-31.

- CROSS, M. C. and HOHENBERG, P. C. 1993, Patterns formation outside of equilibrium , *Rev. Mod. Phys.*, 65, 851.
- CUXART, J., MORALES, G., TERRADELLAS, E. and YAGÜE, C., 2002, Study of Coherent Structures and Estimation of the Pressure Transport terms for the Nocturnal Stable Boundary Layer, *Bound. L. Met.*, 105 (2), 305-28.
- DAVIES, H. C., 1983, Limitations of Some Common Lateral Boundary Schemes used in Regional NWP Models, *Mon. Wea. Rev.*, 111, 1002-12.
- DEARDORFF, J. W., 1971, Numerical Investigation of Neutral and Unstable Planetary Boundary Layer, *J. Atm. Sci.*, 29, 91-115 pp.
- DEARDORFF, J. W., 1971, On the Magnitude of the Subgrid Scale Eddy Coefficient, *J. Comp. Phys.*, 7, 120-133.
- DECKER, W., PESCH, W.M, and WEBER, A., 1994, Spiral defect chaos in Rayleigh-Bénard convection, *Phys. Rev. Lett.* 73, 648-51.
- DESNYANSKY, V. N. and NOVIKOV, E. A. 1974b, *Atmos. Oceanic Phys.* 10, 127.
- DING, F., ARYA, S. P. and LIN, Y.-L., 2001, Large Eddy Simulations of the Atmospheric Boundary Layer Using a New Subgrid-Scale Model, *Env. Fluid. Mech.*, 1, 29-47 pp.
- DOYLE, J. D. and DURRAN, D. R., 2001, The Dynamics of Mountain-Wave-Induced Rotors, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 59, 186-201.
- DRITSCHEL, D. G. and AMBAUM, M. H. P., 2005, The Diabatic Contour Advective Semi-Lagrangian Model, *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 134, 2503-14.
- DRITSCHEL, D. G., 1997, Introduction to "Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions", *J. Comput. Phys.*, 135, 217-219.

- DUTTON, J. A., 1976, *The Ceaseless Wind*, McGraw Hill, New York, 579 pp.
- DUYNKERKE, P. G., JONKER, P. J., CHLOND, A., VAN ZANTEN, M. C., CUXART, J., CLARK, P., SANCHEZ, E., MARTIN, G., LENDERINK, G. And TEIXEIRA, J., 1999, Intercomparison of Three- and One-Dimensional Model Simulations and Aircraft Observations of Stratocumulus, *Boun. L. Meteo.*, 92(3), 453-87.
- ECKMANN, J.-P, and RUELLE, D., 1992, Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems, *Physica D*, 56, 185-87.
- ENQUIST, B. and MAJDA, A., 1979, Radiation Boundary Condition for Acoustic Anelastic Wave Calculation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32, 315-37.
- EYINK, G. and GOLDENFELD, N., 1994, Analogies between scaling in turbulence, field theory, and critical phenomena, *Phys. Rev. A*, 50, 4679.
- FJØRTOF, R., 1952, On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation, *Tellus*, 4, 179-94.
- FJØRTOF, R., 1955, On the use of space-smoothing in physical weather forecasting, *Tellus*, 7, 462-480.
- FRISCH, U., 1995, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge).
- FRISCH, V., MAZZINO, A. and VERGASSOLA, M., 1998, Intermittency in passive scalar advection, *Phys. Rev. Lett.*, 80, 5532.
- FRITSCH, J. M. and CHAPPEL, C. F., 1980, Numerical prediction of convectively driven mesoscale pressure systems. Part II: Mesoscale model, *J. Atmos. Sci.*, 37, 1734-62.

GARIJO, R., 1986, Modelización de los Intercambios Turbulentos en la Capa Límite Planetaria mediante la Vorticidad, Tesina de Licenciatura, UCM.

GOTTLIEB, D. and ORZSAG, S., 1977, Numerical Analysis of Spectral Methods. Theory and Applications, CBMS-SIAM 26, Philadelphia.

HALSEY, R. C., JENSEN, M. H., KADANOFF, L. P., PROCACCIA, I. and SHRAIMAN, B. I., 1986, Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A*, 33, 1141.

HALTINER, G. J. and MARTIN, F. L., 1957, Dynamical and Physical Meteorology, McGraw Hill, New York, 470 pp.

HAMED, A., BASU, D. and DAS, K., 2007, Assessment of multiscale resolution for hybrid turbulence model in unsteady separated transonic flows, *Comp. & Fluids*, 36, 924-34.

HIDE, R., 2002, Helicity, Superhelicity and Weighted relative potential vorticity: Useful Diagnostic Pseudoscalars?, *Q. J. R. Meteor. Soc.*, 128, 1759-62.

HILL, R. J., 1989, Implications of Monin-Obukhov Similarity Theory for Scalar Quantities, *J. Atm. Sci.*, 46, No 14, 2236-2244.

HOLZÄPFEL, F., HOFBAUER, T., DARRACQ, D., MOET, H., GARMIER, F. and FERREIRA-GAGO, C., 2003, Analysis of wake vortex decay mechanisms in the atmosphere, *Aerospace Sci. Technol.*, 7, 263-75.

HUANG, C. -Y., 1996, A Comparative Study of High Order, Quasi-Conservative, Semi-Lagrangian, and Eulerian Advections Schemes, *J. App. Meteor.*, 36, 599-613.

HUNSAKER, J. C. and RIGHTMIRE, B. G., 1947, Engineering Applications of Fluid Mechanics, McGraw-Hill Inc., 494 pp.

- IRMAY, S., and ZUZOVSKY, M., 1970, Exact solutions of the Navier-Stokes equations in two-way flows, *Isr. J. Technol.*, 8, 307-315.
- JACOBSON, M. Z., 1999, *Fundamentals of Atmospheric Modelling*, Camb. Univ. Press.
- KLEISER, L. and ZANG, T. A., 1991, Numerical simulation of transition in wall-bounded shear flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23, 495-537.
- KLEMP, J. B. and DURRAN, D. R., 1983, An upper Boundary Condition permitting Internal Gravity Wave Radiation in Numerical Mesoscale Models, *Mon. Wea. Rev.*, 111, 430-444.
- KOLMOGOROV, A. N., 1941, *C. R. Acad. Sci. USSR* 30, 301 and 32, 16.
- KOLMOGOROV, A. N., 1941a, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 32, 19.
- KOLMOGOROV, A. N., 1942, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.*, VI (1-2), 56.
- KOLMOGOROV, A. N.: Dissipation of energy in a locally isotropic turbulence, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 32, 141 (English translation in: *American Mathematical Society Translations* 1958, Series 2, Vol 8, p. 87, Providence R.I), 1941.
- KOLMOGOROV, A. V., 1962, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 12, 82-85.
- KUNDU, P. K., 1990, *Fluid Mechanics*, Acad. Press, 638 pp.
- KUO, H.-C. and WILLIAMS, R. T., 1990, Semi-Lagrangian solutions to the inviscid Burgers equation., *Mon. Wea. Rev.*, 118, 1278-1288.
- LABBÉ, O., MAGLARAS, E. and GARNIER, F., 2007, Large-eddy simulation of a turbulent jet and wake vortex interaction, *Computers & Fluids*, 36, 772-785.

LANDAU, L. D. and LIFSHITZ, E. M., 1986, Física Teórica, Mecánica de Fluidos. Edit. Reverté.

LANDAU, L. D. and LIFSHITZ, L., 1987, Fluid Mechanics, Pergamon Press, New York.

LE ROUX, D. Y., LIIN, C. A. and STANFORTH, A., 1997, An accurate interpolating scheme for semi-Lagrangian advection on an unstructured mesh for ocean modelling, *Tellus*, 49A, 117-138.

LESLIE, D. C., 1973, Developments in the Theory of Turbulence, Clarendon Press, Oxford.

LESLIE, L. M. and DIETACHMAYER, G. S., 1997, Comparing Schemes for Integrating the Euler Equations, *Mon. Wea. Rev.*, 125, 1687-94.

LESLIE, L. M., MILES, G. A. and GAUNTLETT, D. J., 1981, The Impact of FGGE data Coverage and Improved Numerical Techniques in Numerical Weather Prediction in the Australian Region, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 107, 629-42.

LESSIEUR, M. and MÉTAIS, O., 1996, New trends in large-eddy simulations of turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 28, 45-82.

LESSIEUR, M., 1990, Turbulence in Fluids (Kluwer, Dordrecht).

LILLY, D. K., 1965, On the Computational Stability of Numerical Solutions of the Dependent non-linear Geophysical Fluid Dynamics Problems, *Mon. Wea. Rev.*, 93, 11-26.

LIU, S., MENEVEAU, C. and KATZ, J., 1994, On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet, *J. Fluid Mech.*, 275, 83-119.

- MADDOX, R. A., PERKEY, D. J. and FRITSCH, J. M., 1981, Evolution of upper tropospheric features during the development of a mesoscale convective complex, *J. Atmos. Sci.*, 38, 1664-74.
- MANSOURI, S. H. and BAKHSHAN, Y., 2000, The k- ϵ Turbulence Modelling of Heat Transfer and Combustion Processes in a Texaco controlled Combustion Stratified Charge Engine, *Jour. Of Autom. Eng.*, 214, 149-158 pp.
- McCOMB, W. D., 1990, *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford Eng. Science, Oxford Univ. Press.
- McDONALD, A., 1984, Accuracy of Multiply-Upstream, Semi-Lagrangian Advective Schemes, *Mon. Wea. Rev.*, 112, 1267-1275.
- MELLOR, G. L. and YAMADA, T., 1974, A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers, *J. Atmos. Sci.*, 31, 1791-1806.
- MENEVEAU, C. and SREENIVASAN, K. R., 1991, The multifractal nature of the turbulent energy dissipation, *J. Fluid Mech.*, 224, 429.
- MESINGER, F., 1997, Dynamics of Limited-Area Models: Formulation and Numerical Methods, *Met. Atm. Phys.*, 63, 3-14.
- MESSINGER, F., 1977, Forward-backward scheme and its use in a limited area model, *Beitr. Phys. Atmos.*, 50, 200-10.
- MINGHANG, C. and BATES, J. R., 1995, A comparison of Climate Simulations from a Semi-Lagrangian and an Eulerian GCM, *J. of Clim.*, 9, 1126.
- MIRONOV, D. V., GRYANIK, V. M., MOENG, C. H., OLBERS, D. J. and WARNCKE, T. H., 2000, Vertical Turbulence structure and second-moment budgets in convection with rotation: A large-eddy simulation study, *Q. J. R. Meteor. Soc.*, 126, 477-515.

- MOIN, P. and KIM, J., 1997, Tackling Turbulence with Supercomputers, *Sci. Am.*, 276, 62.
- MOIN, P. and MAHESH, K., 1998, Direct Numerical Simulations: A Tool in Turbulence Research, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30, 539-78.
- MONIN, A. S. and OBUKHOV, A. M., 1954, Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere, *Tr. Geofiz. Inst. Akad. Nauk SSSR*, 151, 163-187.
- MONIN, A. S. and YAGLOM, M., 1971, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, Vol 1, English Transl. The MIT Press.
- MONIN, A.S. and YAGLOM A.M., 1971, *Statistical Fluid Mechanics Vol. 1*(MIT Press, Cambridge Mass).
- MONIN, A.S. and YAGLOM A.M., 1975, *Statistical Fluid Mechanics Vol. 2* (MIT Press, Cambridge Mass).
- MORINISHI, Y. and VASILYEV, O. V., 2001, A recommended modification to the dynamic two-paramettermixed subgrid scale model for large eddy simulation of wall bounded turbulent flow, *Phys. Fluids*, 13, 3400-3410.
- NICOLINI, M. and TORRES BRIZUELA, M., 2002, Sensitivity of a two-dimensional convective model to turbulence parametrization, *Atmósfera*, 15, 193-207.
- OBUKHOV, A. M. 1971, *Atmos. Oceanic. Phys.*, 7, 41.
- OH, W. S., KIM, J. S. and KWON, O. J., 2003, Time-accurate Navier-Stokes simulation of vortex convection using an unstructured dynamic mesh procedure, *Comp. & Fluids*, 32, 727-49.
- ORZSAG, S. A., 1977, In *Fluid Dynamics*, ed. Balian R. and Peube J. L. (Gordon and Breach, London), 235 pp.

PACKARD, N. H. CRUTCHFIELD, J. P., FARMER, J. D. and SHAW, R. S. 1980, Geometry from a Time Series, *Phys. Rev. Lett.*, 45, 712.

PALADIN, G. and VULPIANI, A. 1987b, *Phys. Rev. A* 35, 1971.

PAIN, C. C., PIGGOTT, M. D., GODDARD, A. J. H., FANG, F. GORMAN, G. J., MARSHALL, D. P., EATON, M. D., POWER, P. W. and OLIVEIRA, C. R. E., 2005, Three-dimensional unstructured mesh ocean modelling, *Ocean Modelling*, 10, 5-33.

PANOFSKY, H. A. and DUTTON, J. A., 1984, *Atmospheric Turbulence: Models and Methods for Engineering Applications*, Wiley and Sons.

PAOLI, R., LAPORTE, F. and CUENOT, B., 2003, Dynamics and mixing in jet/vortex interactions, *Phys. Fluids*, 15(7), 1843-60.

PHILIPS, N. A., 1956, The general circulation of the atmosphere: A numerical experiment, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 82, 123-64.

PRANDTL, L., 1925, *Z. Angew. Math. Mech.*, 5, 136.

RASCH, R. J., 1986, Toward Atmospheres without Tops: Absorbing Upper Boundary Conditions for Numerical Models, *Quart. J. R. Met. Soc.*, 112, 1195-218.

REES, J.M. and MOBBS, S.D., 1990, Large eddies in the stably stratified atmospheric boundary layer, *Proc. on Waves and Turbulence in Stably Stratified Flows*, 3rd IMA Conference.

REYNOLDS, O., 1883, An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct o Sinous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels, *Phil. Trans. Of the Royal Soc. of London*, 174, pp 935-982.

- REYNOLDS, O., 1894, Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A, 186, 123.
- REYNOLDS, W. C., 1976, Computation of turbulent flows, Annu. Rev. Fluid Mech., 8, 183-208.
- RICHARDSON, L. F., 1922, Weather Prediction by Numerical Process, Camb. Univ. Press.
- RIISHØJGAARD, L. P., COHN, S. E., MÉNARD, Y. L. and R., 1998, The Use of Spline Interpolation in Semi-Lagrangian Transport Models, Mon. Wea. Rev., 126, 2008-16.
- RITCHIE, H. and TANGUAY, M., 1996, A comparison of spatially averaged Eulerian and semi-Lagrangian treatments of mountains, Mon. Wea. Rev., 124, 167-181.
- RITCHIE, H., 1987, Semi-Lagrangian Advection on a Gaussian Grid, Mon. Wea. Rev., 115, 608-19.
- ROBERT, R. and SOMMEERIA, J., 1991, Statistical equilibrium states for two-dimensional flows, J. Fluid Mech., 229, 291.
- ROBERTSON, L. and LANGNER, J., 1999, An Eulerian Limited-Area Atmospheric Transport Model, J. Appl. Meteor., 38, 190-210.
- RUELLE, D. and TAKENS, F., 1971, Commun. Math. Phys. 20, 167 and 23, 343.
- SALVETTI, M. V. and BANERJEE, S., 1995, A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulations, Phys. Fluids, 11, 2831-2847.
- SHAPIRO, A., 1993, The use of an Exact Solution of the Navier-Stokes Equations in a Validation Test of a Three-Dimensional nonhydrostatic Numerical Model, Mon. Wea. Rev., Vol. 121, 2420.

SKAMAROCK, W. C., 1989, Adaptive Grid Refinement for Numerical Weather Prediction, *J. Comput. Phys.*, 80, 27-60.

SMITH L., 1988, Intrinsic Limits on Dimension Calculations, *Phys. Lett. A*, 133, 283-88.

SPEZIALE, C. G., 1991, Analytical methods of the development of Reynolds-stress closures in turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23, 107-57.

SREENIVASAN, K. R. and DHARVA, B., 1998, *prog. Theor. Phys. Suppl.*, 130, 103.

SREENIVASAN, K. R., 1999, Fluid turbulence, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 71, No. 2, 383-395.

STANFORTH, A. and CÔTÉ, J., 1991, Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models -A Review, *Mon. Wea. Rev.*, 119, 2206-23.

STOLOVITZKY, G. and SREENIVASAN, K. R., 1994, *Rev. Mod. Phys.*, 66, 229.

SUN, W. -Y. And YEH, K. -S., 1997, A general semi-Lagrangian advection scheme employing forward trajectories, *Q. J. R. Meteor. Soc.*, 123, 2463-76.

TAKENS F. 1981, *Lect. Notes in Math.*, 898, 366.

TAYLOR, G. I., 1931, The Transport of Vorticity and Heat through Fluids in Turbulent Motion, *Proc. Royal. Soc., London. Ser. A*, 135, 685-705 pp.

TEMPERTON, C., 1990, *Finite Element Methods*, European Centre for Medium Range Weather Forecast, Reading UK.

TENNEKES, H. and LUMLEY, J. L., 1972, *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cambridge, MA.

- TERRY, L. C., 1991, Lateral and Upper Boundary Conditions, Proc. Numer. Met. in Atm. Models, II, Sept.,9-13, pp 43-71.
- TOWNSEND, A., 1956, The structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, England.
- TREFETHEN, L. N., 1996, Spectral Methods in MATLAB, SIAM, Philadelphia.
- TRITTON, D. J., 1988, Physical Fluid Dynamics (Oxford University Press, Oxford).
- TUTAR, M. and OGUZ, G., 2004, Computational Modeling of Wind Flow Around a Group of Buildings, Int. J. Of Comp. Fluid Dyn., 18(8), 651-70.
- ULIASZ, M., 1994, Subgrid scale parametrizations. Mesoscale modeling of the atmosphere, R. A. Pielke and R. Pearce, Ed., American Meteorological Society, 13-19.
- VAN DYKE, M., 1982, An Album of Fluid Motion, Parabolic Press, Stanford.
- VOIGT, R. G., GOTTLIEB, D. and HUSSAINI, M. Y., 1984, Spectral Methods for Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia.
- VON KÁRMÁN, T., 1930, Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, Math. Phys., K1, 58.
- WANG, B. -C. and BERGSTROM, D. J., 2004, An Integral-type Dynamic Localization Two-parameter Subgrid-scale Model: Formulation and Simulation, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 18(2), 209-220.
- WANG, C. Y., 1990, Exact solutions of the Navier-Stokes equations-The generalized Beltrami flows, review and extensions. Acta Mechanica, 81, 69-74.

WILLIAMS, G. P., 1969, Numerical Integration on the three-dimensional Navier-Stokes equations for the incompressible flow, *J. Fluids Mech.*, 37(4), 727-50.

WU, W. -S. and LILLY, D. K., 1992, The Helicity and Thermal Convection with Shear, *J. of the Atm. Sci.*, 49, No 19, 1800-1809.

WYGNANSKI, I. J., CHAMPAGNE, F. H. and MARASLI, B., 1986, On The Large-Scale Structures In Two-Dimensional, Small-Deficit, Turbulent Wakes, *J. Fluid Mech.*, 168, 31-71.

YAN, J. THIELE, F. and XUE, L., 2007, A modified full multigrid algorithm for the Navier-Stokes equations, *Computers & Fluids*, 445-454.

YANO, J.-I., TALAGRAND, O. and DROSSART, P., 2005, Deep two-dimensional turbulence: An idealized model for atmospheric jets of the giant outer planets, *Geophysical and Astrophysical Fluid*.

YIH, C. S., 1977, *Fluid Mechanics*. West River Press.

ZANG, Y., STREET, R. L. and KOSEFF, J. R., 1993, A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows, *Phys. Fluids*, 5, 3186-3196.